STRATEGI MENYELESAIKAN PUZZLE YANG MEMUAT ASPEK MATEMATIKA

Endah Dwi Purwantari *), Dr. Julan Hernadi, M.Si *)
Prodi Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Muhammadiyah Ponorogo

Abstrak

Puzzle matematika adalah permainan yang membutuhkan ilmu matematika agar mendapat hasil/jawaban. Puzzle ini memiliki peraturan yang cukup spesifik dan rumit, di mana pemain puzzle harus menemukan jawaban (solusi) dalam bermain berdasarkan peraturan yang berlaku di permainan tersebut. Bentuk strategi dalam menyelesaikan puzzle ini didasarkan pada duabelas ide dasar, yaitu mencari pola (*search for a pattern*), memberi ilustrasi/gambar (*draw a figure*), merumuskan permasalahan yang serupa (*formulate an equivalent problem*), memodifikasi permasalahan (*modify the problem*), memilih notasi yang efektif (*choose effective notation*), memanfaatkan kesimetrisan (*exploit symmetry*), membagi dalam kelompok-kelompok (*divide into cases*), bekerja mundur (*work backward*), memberi alasan dengan kontradiksi (*argue by contradiction*), mengikuti kesamaan (*pursue parity*), mempertimbangkan kasus ekstrem (*consider extrem cases*), dan perumuman (*generalize*).

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk merepresentasikan strategi penyelesaian dan solusi dari (1) Puzzle Bilangan Kuadrat. (2) Perkalian Ajaib (3) Puzzle Bilangan Prima. (4) Puzzle Kelipatan 7 dengan Hasil Penjumlahan Terbesar. (5) Puzzle Perkalian dan Pembagian.

Penelitian ini menggunakan metode penelitian kepustakaan atau riset kepustakaan (*library research*). Penelitian ini berkaitan dengan metode pengumpulan pustaka, membaca, dan mencatat serta mengolah bahan penelitian.

Hasil dari penelitian ini adalah representasi strategi penyelesaian dan solusi dari (1) Puzzle Bilangan Kuadrat. (2) Perkalian Ajaib (3) Puzzle Bilangan Prima. (4) Puzzle Kelipatan 7 dengan Hasil Penjumlahan Terbesar. (5) Puzzle Perkalian dan Pembagian.

Kata Kunci: Strategi Menyelesaikan Puzzle, Puzzle yang memuat Aspek Matematika, Puzzle Bilangan Kuadrat, Perkalian Ajaib, Puzzle Bilangan Prima, Puzzle Kelipatan 7 dengan Hasil Penjumlahan Terbesar, Puzzle Perkalian dan Pembagian.

PENDAHULUAN

Dalam pandangan orang awam, matematika selalu identik dengan masalah pencacahan dan perhitungan yang menitikberatkan pada hasil akhir yang bernilai pasti. Akan tetapi, matematika sebenarnya adalah sebuah ilmu yang menggabungkan logika dalam berpikir, berimajinasi, menganalisis, serta kemampuan menghitung. Hal ini terlihat dari begitu banyaknya cabang ilmu matematika yang menggabungkan seluruh kemampuan tersebut, misalnya statistika, matematika diskrit, matematika kombinatorik, analisis, aljabar, teori bilangan, matematika rekreasi, dan lain-lain.

Salah satu cabang matematika yang menarik adalah matematika rekreasi. Matematika rekreasi seringkali digunakan oleh matematikawan untuk bermain-main karena rasa penasarannya yang ingin mengerjakan. Selain itu, matematika rekreasi juga digunakan untuk mengasah logika dalam kesenangan tetapi tetap serius, mengetahui indahnya matematika dalam hidup, mengeksplorasi keajaiban matematika, melacak kebenaran hasil matematika, serta melatih ketelitian.

Matematika rekreasi sering melibatkan Teka Teki Matematika (Puzzle Matematika) dan Quiz Matematika. Puzzle matematika adalah

permainan yang membutuhkan ilmu matematika agar mendapat hasil/jawaban. Puzzle ini memiliki peraturan yang cukup spesifik dan rumit. Di dalam menyelesaikan puzzle matematika, pemain harus menemukan jawaban (solusi) dalam bermain berdasarkan peraturan yang berlaku di permainan tersebut. Sedangkan Quiz Matematika adalah adu cepat menjawab pertanyaan matematika, yang mana pertanyaan tersebut berupa ujian lisan maupun tertulis yang singkat.

Di dalam buku "The Master Book of Mathematical Recreations" karya Fred. Schuh terdapat berbagai macam puzzle. Pada salah satu bab berisi tentang puzzle yang memuat aspek matematika. Puzzle tersebut di antaranya: puzzle bilangan kuadrat, perkalian ajaib, puzzle bilangan prima, puzzle kelipatan 7 dengan hasil penjumlahan terbesar, serta puzzle perkalian dan pembagian.

Untuk menyelesaikan puzzle secara cepat dan tepat dibutuhkan suatu strategi penyelesaian. Strategi penyelesaian ini dapat melalui prosedur sistematis maupun analitis. Prosedur sistematis dengan memberikan bantuan alasan yang logis sebanyak mungkin. Sedangkan prosedur analitis dimulai dengan perkiraan yang tepat dan mengecek ulang sebelum memberi kepastian.

Menurut Loren C. Larson dalam bukunya yang berjudul "Problem-Solving Through Problems", adapun strategi dalam menyelesaikan permasalahan yaitu di antaranya dengan mencari pola, membuat ilustrasi, memilih notasi yang efektif, serta pembagian kelompok-kelompok.

Di dalam buku "The Master Book of Mathematical Recreations" karya Fred. Schuh terdapat puzzle yang memuat aspek matematika, sedangkan di buku "Problem-Solving Through Problems" karya Loren C. Larson terdapat strategi dalam menyelesaikan permasalahan. Oleh karena itu, pada skripsi ini akan dibahas mengenai hal tersebut.

HASIL PENELITIAN

Pada kajian ini akan dibahas mengenai puzzle yang memuat aspek matematika yang berasal dari buku karya Fred. Schuh yang berjudul "The Master Book of Mathematical Recreations" bab XIII yang berisi "Puzzles with Some Mathematical Aspects" dengan menggunakan ide dasar strategi penyelesaian yang berasal dari buku Loren C. Larson yang berjudul "Problem Solving Through Problems".

Menurut Loren C. Larson, ada duabelas ide dasar dalam menyelesaikan permasalahan (puzzle) matematika, yaitu:

1. mencari pola (*search for a pattern*)
2. memberi ilustrasi/gambar (*draw a figure*)
3. merumuskan permasalahan yang serupa (*formulate an equivalent problem*)
4. memodifikasi permasalahan (*modify the problem*)
5. memilih notasi yang efektif (*choose effective notation*)
6. memanfaatkan kesimetrisan (*exploit symmetry*)
7. membagi dalam kelompok-kelompok (*divide into cases*)
8. bekerja mundur (*work backward*)
9. memberi alasan dengan kontradiksi (*argue by contradiction*)
10. mengikuti kesamaan (*pursue parity*)
11. mempertimbangkan kasus ekstrem (*consider extrem cases*)
12. perumuman (*generalize*)

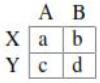
Puzzle dan strategi penyelesaian:

1. Temukan dua bilangan kuadrat berdigit dua, X dan Y. Bilangan

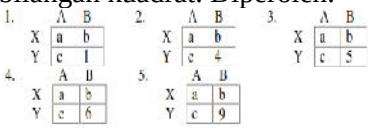
X ditulis di atas Y. Jika angka-angka penyusun X dan Y dibaca dari atas ke bawah, maka akan membentuk bilangan kuadrat berdigit dua pula (sebut saja A dan B).

Strategi penyelesaian:

a. Memberi ilustrasi dan notasi

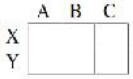


b. Mendaftar semua bilangan kuadrat berdigit dua. Sesuai dengan ciri bilangan kuadrat, maka selanjutnya membaginya dalam dua kelompok, yaitu kelompok bilangan yang *memuat* dan *tidak memuat* angka terakhir bilangan kuadrat. Diperoleh:



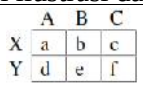
c. Menemukan angka pengganti a, b, dan c yang sesuai. Sehingga diperoleh solusi berupa himpunan pasangan bilangan (X, Y):
$\{(\mathbf{16},\mathbf{64}),(\mathbf{36},\mathbf{64}),(\mathbf{81},\mathbf{16}),(\mathbf{64},\mathbf{49})\}$

2. Temukan dua bilangan kuadrat berdigit tiga, X dan Y. Bilangan X ditulis di atas Y. Jika angka-angka penyusun X dan Y dibaca dari atas ke bawah, maka akan membentuk bilangan kuadrat berdigit dua (sebut saja A, B, dan C).

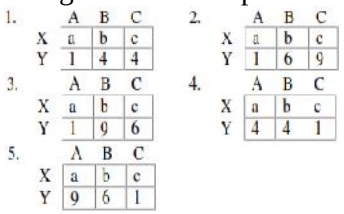


Strategi penyelesaian:

a. Memberi ilustrasi dan notasi

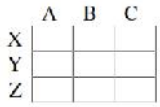


b. Mendaftar semua bilangan kuadrat berdigit tiga. Sesuai dengan ciri bilangan kuadrat, maka selanjutnya membaginya dalam dua kelompok, yaitu kelompok bilangan yang *memuat* dan *tidak memuat* angka terakhir bilangan kuadrat. Diperoleh:



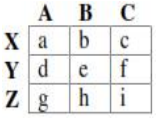
c. Menemukan angka pengganti untuk a, b, dan c yang sesuai. Sehingga diperoleh solusi berupa pasangan bilangan
$(X,Y) = (\mathbf{841},\mathbf{196})$

3. Temukan tiga bilangan kuadrat berdigit tiga, X, Y, dan Z. Penulisan berjajar dari atas ke bawah berturut-turut X, Y, dan Z. Jika angka-angka penyusun bilangan X, Y, dan Z dibaca dari atas ke bawah, maka akan membentuk bilangan kuadrat berdigit tiga (sebut saja A, B, dan C).

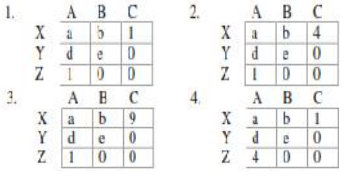


Strategi penyelesaian:

a. Memberi ilustrasi dan notasi



b. Mendaftar semua bilangan kuadrat berdigit tiga. Sesuai dengan ciri bilangan kuadrat, maka selanjutnya membaginya dalam dua kelompok, yaitu kelompok bilangan yang *memuat* dan *tidak memuat* angka terakhir bilangan kuadrat. Diperoleh:



5.

	A	B	C
X	a	b	4
Y	d	e	0
Z	4	0	0

6.

	A	B	C
X	a	b	9
Y	d	e	0
Z	4	0	0

7.

	A	B	C
X	a	b	1
Y	d	e	0
Z	9	0	0

8.

	A	B	C
X	a	b	4
Y	d	e	0
Z	9	0	0

9.

	A	B	C
X	a	b	9
Y	d	e	0
Z	9	0	0

10.

	A	B	C
X	a	b	1
Y	d	e	4
Z	1	4	4

11.

	A	B	C
X	a	b	1
Y	d	e	6
Z	1	6	9

12.

	A	B	C
X	a	b	1
Y	d	e	9
Z	1	9	6

13.

	A	B	C
X	a	b	4
Y	d	e	4
Z	4	4	1

14.

	A	B	C
X	a	b	9
Y	d	e	6
Z	9	6	1

15.

	A	B	C
X	a	b	9
Y	d	e	6
Z	4	4	1

16.

	A	B	C
X	a	b	4
Y	d	e	4
Z	9	6	1

c. Menemukan angka pengganti untuk a, b, d, dan e yang sesuai. Sehingga diperoleh salah satu solusi berupa pasangan bilangan

$$(X, Y, Z) = (529, 256, 961)$$

4. Temukan empat bilangan kuadrat berdigit empat P, Q, R, dan S. Penulisan berjajar dari atas ke bawah berturut-turut P, Q, R, dan S. Jika angka-angka penyusun bilangan P, Q, R, dan S dibaca dari atas ke bawah, maka akan membentuk bilangan kuadrat berdigit empat (sebut saja A, B, C, dan D).

	A	B	C	D
P				
Q				
R				
S				

Strategi penyelesaian:

a. Memberi ilustrasi dan notasi

	A	B	C	D
P	a	b	c	d
Q	e	f	g	h
R	i	j	k	l
S	m	n	o	p

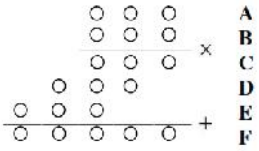
b. Mendaftar semua bilangan kuadrat berdigit tiga. Sesuai dengan ciri bilangan kuadrat, maka selanjutnya membaginya dalam dua kelompok, yaitu kelompok bilangan yang *memuat* dan *tidak memuat* angka terakhir bilangan kuadrat. Diperoleh dua puluh kemungkinan, salah satunya yaitu:

1.

	A	B	C	D
P	a	b	c	1
Q	e	f	g	1
R	i	j	k	5
S	1	1	5	6

c. Menemukan angka pengganti untuk a, b, c, e, f, g, i, j, dan k yang sesuai. Sehingga diperoleh salah satu solusi berupa pasangan bilangan $(P, Q, R, S) = (7921, 9801, 2025, 1156)$

5. **Perkalian ajaib 20 digit**. Temukan bilangan A, B, C, D, E, dan F berikut.



Strategi penyelesaian:

Terdapat dua puluh lingkaran kecil yang mewakili sepuluh angka (0,1,2,3,4,5,6,7,8, dan 9). Karena ada dua puluh lingkaran kecil, maka setiap angka tepat diwakili oleh dua lingkaran kecil.

Ide dasar yang digunakan yaitu membagi dalam kelompok-kelompok, mencari pola, serta menentang dengan kontradiksi.

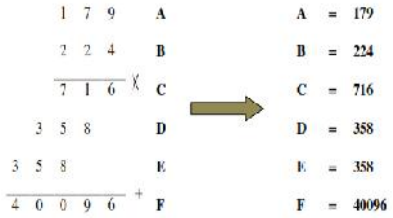
Langkah penyelesaian:

a. A tidak boleh berakhir pada angka 0, 1, atau 5
b. B tidak boleh berisi angka 0 dan juga B tidak boleh berakhir pada angka 1
c. Jika A bilangan ganjil, maka dia tidak boleh berakhir pada angka 5
d. Angka terakhir pada B tidak boleh sama dengan angka lainnya dari B
e. Jika B berisi angka 1, maka enam angka dari A dan B semuanya harus berbeda
f. Angka pertama pada B bukan angka 9 (Jika ini

terjadi, angka pertama dari B, C, dan F akan sama, dan semuanya adalah angka 9).

g. Jika B berisi sebuah angka 9, maka A harus lebih kecil dari bilangan 111 (karena bilangan C, D, dan E hanya boleh terdiri dari tiga angka).
h. Jika B berisi sebuah angka 9, maka C, D, dan E pasti dimulai dengan angka yang berada pada B. Begitu pula jika B berisi sebuah angka 8 dengan dua angka yang kurang dari 5 dan sebuah angka 7 dengan dua angka 2, maka C, D, atau E akan dimulai dengan angka yang berada pada B.
i. Angka-angka penyusun bilangan B tidak boleh apabila semuanya angka 8 atau lebih.
j. Angka penyusun bilangan B tidak boleh lebih besar dari 6.
k. Jika B berisi angka 1 (yang kemudian tidak boleh muncul lagi pada A karena syarat pada nomor 5), maka angka pertama dari A minimal 2 dan angka terbesar untuk B adalah 4.
l. Jika B berisi angka 1, angka pertama A adalah 2, maka B tidak boleh berisi angka 2 dan harus selain angka 1.
m. Jika B berisi angka 1 dan 2 sekaligus, maka angka pertama A harus lebih besar dari 2.
n. Jika B berisi angka 1, maka angka 3 dan 4 adalah angka lainnya dari B, dan angka pertama dari A adalah 2.
o. Menghubungkan dengan sisa hasil bagi untuk pembagian bilangan 9 untuk mencari pola bilangan A dan B.
p. Mengkombinasikan hasil langkah a sampai n dengan pola bilangan pada langkah o.

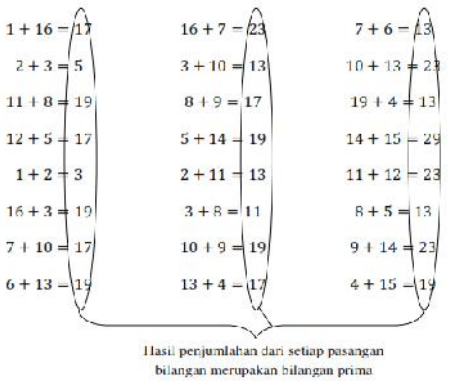
Sesuai langkah a sampai o diperoleh solusi:



6. **Bilangan prima**. Bagaimana menyusun (mengisikan) bilangan $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15,$ dan 16 ke dalam enambelas kotak berbentuk persegi dengan ukuran 4×4 di bawah ini, sehingga hasil penjumlahan dari setiap pasangan bilangan yang berdekatan (secara horizontal maupun vertikal) akan berupa bilangan prima.

Contoh solusi:

1	16	7	6
2	3	10	13
11	8	9	4
12	5	14	15



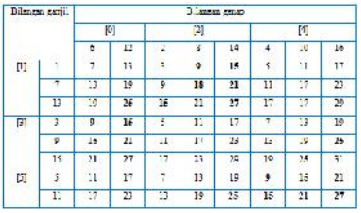
Strategi penyelesaian:

a. Bilangan prima: $2, 3, 5, 7, \ldots$. Akan tetapi bilangan prima 2 tidak mungkin muncul pada hasil penjumlahan pasangan berdekatan di atas, karena jumlah minimal pasangan

berdekatan itu adalah 3. Diperoleh dari 1 dan 2 yang berdekatan. $1 + 2 = 3$. Jadi, hasil penjumlahan pasangan berdekatan tersebut pasti berupa bilangan ganjil, karena bilangan prima yang tersisa adalah bilangan ganjil. Agar diperoleh hasil penjumlahan berupa bilangan ganjil, maka bilangan ganjil dan genap harus selalu berdekatan. Bilangan 1 sampai dengan 16 ini kita bagi menjadi dua kelompok bilangan. Kelompok bilangan ganjil yaitu $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13,$ dan 15, serta kelompok bilangan genap yaitu $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14,$ dan 16. Enambelas kotak persegi berukuran 4×4 juga dibagi menjadi dua, sedemikian sehingga bilangan ganjil akan ditempatkan pada kotak persegi terang dan bilangan genap akan ditempatkan pada kotak persegi gelap.

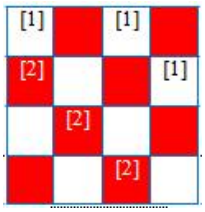
b. Memodifikasi masalah dan membagi dalam kelompok-kelompok. Menggunakan definisi aritmetika modular dengan modulo 6, maka diperoleh kelas-kelas ekuivalensi sebagai berikut:
$[0] = \{6,12\}$
$[1] = \{1,7,13\}$
$[2] = \{2,6,14\}$
$[3] = \{3,9,15\}$
$[4] = \{4,10,16\}$
$[0] = \{5,11\}$
Sehingga [0], [2], dan [4] akan menempati kotak gelap dan [1], [3], dan [5] akan menempati kotak terang.

c. Bilangan yang boleh menjadi pasangan bilangan berdekatan:

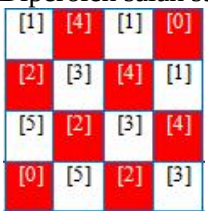


Bilangan bercetak tebal bukan bilangan prima, yang berarti bahwa bilangan ganjil dan bilangan genap yang dijumlahkan sehingga menghasilkan bilangan komposit, maka kedua bilangan tersebut tidak boleh berdekatan.

d. Menempatkan [1] dan [2], dengan ketentuan [1] dan [2] boleh berdekatan satu kali. Diperoleh salah satu bentuk berikut:



e. Mengisikan [0], [3], [4], dan [5]. Diperoleh salah satu bentuk:

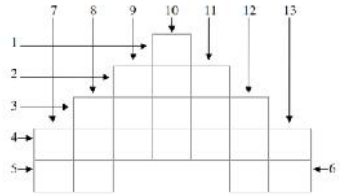


f. Mengembalikan bilangan dari kelas-kelas ekuivalensi ke bentuk bilangan semula. Diperoleh salah satu solusi, yaitu:

g. Puzzle bilangan prima ini mempunyai 5.920 solusi. Silahkan mencari solusi lainnya.

7. **Kelipatan 7 dengan hasil penjumlahan terbesar**. Isikan angka 0,1,2,3,4,5,6,7,8, dan 9 ke

dalam 20 kotak berikut, di mana masing-masing angka tepat menempati dua kotak, sehingga dari susunan tersebut akan menghasilkan tigabelas bilangan kelipatan 7 (dengan pembacaan dari atas ke bawah dan dari kiri ke kanan) yang mempunyai hasil penjumlahan terbesar.



Strategi penyelesaian:

a. Karena terdapat sepuluh angka dan duapuluh kotak, maka setiap angka tepat menempati dua kotak kosong.

b. Mempertimbangkan kasus ekstrem. Bilangan teratas merupakan bilangan berdigit satu, sehingga kemungkinan berisi angka 7 atau 0.

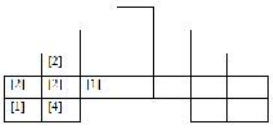
c. Memodifikasi masalah dan membagi dalam kelompok-kelompok. Sesuai definisi aritmetika modular dengan modulo 7 dan keberadaan kelas-kelas ekuivalensi, maka diperoleh:
$[0] = \{0,0,7,7\}$
$[1] = \{1,1,8,8\}$
$[2] = \{2,2,9,9\}$
$[3] = \{3,3\}$
$[4] = \{4,4\}$
$[5] = \{5,5\}$
$[6] = \{6,6\}$

d. Dengan memanfaatkan sifat sisa hasil bagi oleh 7, yaitu jika dua bilangan dengan dua angka yang berada pada bagian bawah, keduanya terbagi oleh 7, maka satu bilangan dengan empat angkanya pasti juga terbagi 7. Oleh karena itu, kita hanya perlu menemukan bilangan-bilangan penyusunnya yang terbagi 7, sehingga akan membentuk keseluruhan bilangan tersebut terbagi 7.

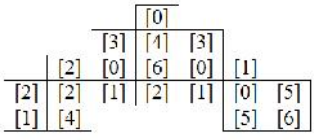
e. Bilangan berdigit tiga yang habis dibagi 7 setelah pembentukan kelas ekuivalensi:

000	105	203	301	406	504	602
014	112	210	315	413	511	616
021	126	224	322	420	525	623
035	133	231	336	434	532	630
042	140	245	343	441	546	644
056	154	252	350	455	553	651
063	161	266	364	462	560	665

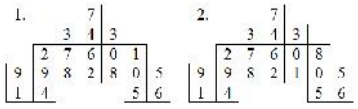
f. Mempertimbangkan kasus ekstrem. Agar mempunyai hasil penjumlahan terbesar, maka bilangan berdigit tujuh harus dimulai dengan 99 atau menjadi [2][2]. Bilangan vertikal paling kiri berisi [2][1], bilangan horisontal bagian kiri bawah [1][4], sehingga bilangan vertikal nomor delapan menjadi [2][2][4]. Diperoleh:



g. Membagi dalam kelompok-kelompok, sehingga diperoleh salah satu bentuk berikut:

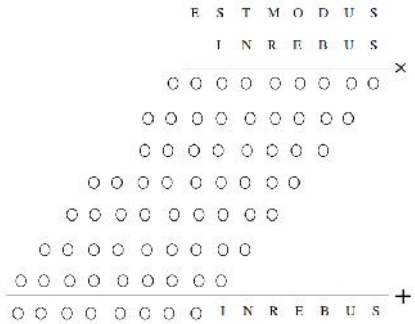


h. Mengembalikan bilangan-bilangan pada kelas ekuivalensi ke bentuk semula. Diperoleh:



Dengan strategi ini diperoleh dua solusi seperti di atas.

8. Temukan bilangan berdigit delapan yang diwakili tulisan ESTMODUS dan bilangan berdigit tujuh yang diwakili tulisan INREBUS, sehingga dapat memenuhi perkalian bersusun berikut ini.



Huruf yang sama mewakili angka yang sama. Karena terdapat sebelas huru dan sepuluh angka, maka tepat dua huruf mewakili angka yang sama.

Strategi penyelesaian:

a. Memilih notasi yang efektif. Misal: X = ESTMODUS dan Y = INREBUS. $X \times Y$ mempunyai tujuh hasil kali parsial.

b. Mempertimbangkan kasus ekstrem. Semua hasil kali parsial merupakan bilangan berdigit sembilan. Kecuali hasil kali parsial ketiga merupakan bilangan berdigit delapan. Oleh karena itu huruf B kemungkinan mewakili angka 0, 1, atau 2.

c. Memilih notasi yang efektif. X dan Y mempunyai dua angka terakhir yang sama, yang diwakili tulisan US.
x = ESTMOD
y = INREB
z = US

d. Membagi dalam kelompok. Hasil kali $X \times Y$ mempunyai dua ngka terakhir sama, sebagai z^2, di mana z^2 ini mempunyai dua angka terakhir yang sama dengan z. Jadi, kemungkinannya $z = 25$ atau $z = 76$.
Huruf B kemungkinan mewakili angka 0, 1, atau 2, sehingga $E \geq 3$.

e. Mencari pola. Sesuai dengan salah satu sifat keterbagian, yaitu $a|b$ dan $c|d \leftrightarrow ac|bd$.
Y dan $X \times Y$ mempunyai tujuh angka terakhir yang sama, maka:
$X \times Y - Y = Y(X-1)$
harus terbagi oleh 10^7.
$10^7 = (2 \times 5)^7 = 2^7 \times 5^7$
Dengan kata lain harus terpenuhi bahwa:
$Y|2^7 \rightarrow (X-1)|5^7$ atau
$Y|5^7 \rightarrow (X-1)|2^7$.
Kasus $z = 76$, diperoleh:
$Y = 10^2 \times y + 76$
$Y = 2^2(5^2 \times y + 19)$ terbagi oleh 2^2, sehingga $5^2 \times y + 19$ harus terbagi oleh 2^5.
$5^2 \times y + 19 = 2^5 \times n = 32 \times n$
$(5^2 \times y + 19)|32 \rightarrow (5^2 \times y + 19)|4$.
$25 \times y + 19 = 4n$
$y = \frac{4n-19}{25}$
$y - 1 = \frac{4n-19}{25} - 1$
$= \frac{4n-19-25}{25}$

$= \frac{4n-44}{25}$

$= \frac{4(n-11)}{25}$

$= 4 \times \left(\frac{n-11}{25}\right)$

$y - 1$ adalah bilangan kelipatan 4, akibatnya y **adalah bilangan kelipatan 4 ditambah 1.**

$X - 1 = (10^2 \times x) + 76 - 1$

$X - 1 = (10^2 \times x) + 75$

$X - 1 = 5^2(2^2 \times x) + 3$

terbagi oleh 5^2, sehingga $(2^2 \times x) + 3$ harus terbagi oleh 5^5.

$(2^2 \times x) + 3 = 5^5 \times t$

$(2^2 \times x) + 3 = 3.125 \times t$

$(4 \times x) + 3 = 3.125 \times t$

$3.125 = 4n + 1 \rightarrow t = 4v + 3$ sehingga diperoleh:

$(4 \times x) + 3 = 3125 \times t$

$x = \frac{3.125t-3}{4}$

$x = \frac{3.125(4v+3)-3}{4}$

$x = \frac{3.125\times4v+3.125\times3-3}{4}$

$x = \frac{3.125\times4v}{4} + \frac{3.125\times3-3}{4}$

$x = 3.125v + \frac{9.372}{4}$

$x = 3.125v + 2.343$

Y = INREBUS, di mana $E \geq 3$ dan B = 1 atau 2.

Untuk mencari bilangan y yang berdigit lima yang merupakan bilangan kelipatan 4 ditambah 1, maka cukup diperhatikan dari dua digit terakhir bilangan y tersebut yang memenuhi kelipatan 4 ditambah 1. Dua digit terakhir bilangan y yang diwakili huruf EB tersebut kemungkinannya yaitu 41, 61, dan 81.

Diperoleh:

$Y = \overbrace{I\,N\,R\,E\,B}^{y}\,\overbrace{U\,S}^{z}$

$Y_1 = I\,N\,R\,4\,1\,7\,6$

$Y_2 = I\,N\,R\,6\,1\,7\,6$

$Y_3 = I\,N\,R\,8\,1\,7\,6$

$X = \overbrace{M\,A\,D}^{x}\,\overbrace{U\,S}^{z}$

$x = 3.125v + 2.343$

$x_1 = 3.125 \times 147 + 2.343 = 461.718$

$x_2 = 3.125 \times 148 + 2.343 = 464.843$

$x_3 = 3.125 \times 149 + 2.343 = 467.968$

$x_4 = 3.125 \times 211 + 2.343 = 661.718$

$x_5 = 3.125 \times 212 + 2.343 = 664.843$

$x_6 = 3.125 \times 213 + 2.343 = 667.968$

$x_7 = 3.125 \times 275 + 2.343 = 861.718$

$x_8 = 3.125 \times 276 + 2.343 = 864.843$

$x_9 = 3.125 \times 277 + 2.343 = 867.968$

	E	S	T	M	O	D	U	S	
X_1	4	6	1	7	1	8	7	6	X
	4	6	4	8	4	3	7	6	X
	4	6	7	9	6	8	7	6	X
X_2	6	6	1	7	1	8	7	6	X
	6	6	4	8	4	3	7	6	X
	6	6	7	9	6	8	7	6	X
X_3	8	6	1	7	1	8	7	6	X
	8	6	4	8	4	3	7	6	X
	8	6	7	9	6	8	7	6	X

$z = 76$ tidak memberikan solusi untuk puzzle ini.

Kasus $z = 25$

$Y = (10^2 \times y) + 25$

$Y = 5^2(2^2 \times y) + 1$

$Y = 5^2(2^2 \times y) + 1$ terbagi oleh 5^2, akibatnya $(2^2 \times y) + 1$ harus terbagi oleh 5^5.

$(2^2 \times y) + 1 = 5^5 \times w$

$(2^2 \times y) + 1 = 3.125 \times w$

$(4 \times y) + 1 = 3.125 \times w$

$3125 = 4n + 1 \rightarrow w = 4u + 1$ sehingga diperoleh:

$(4 \times y) + 1 = 3.125 \times w$

$y = \frac{3.125w-1}{4}$

$y = \frac{3.125(4u+1)-1}{4}$

$y = \frac{3.125\times4u+3.125\times1-1}{4}$

$y = \frac{3.125\times4u}{4} + \frac{3.124}{4}$

$y = 3.125u + 781$

Y = INREBUS, di mana $E \geq 3$ dan B = 1 atau 2. Oleh karena itu, u haruslah bilangan genap, $u = 2n$. Diperoleh:

$y = 3.125u + 781$
$y = 3.125(2n) + 781$
$y = 6.250n + 781$

Karena y tidak boleh berisi angka 0, serta diawali angka 1 dan 2 seperti angka terakhirnya, maka kemungkinan bilangan y adalah:

$y_1 = 6.250 \times 6 + 781 = 38.281$
$y_2 = 6.250 \times 7 + 781 = 44.531$
$y_3 = 6.250 \times 10 + 781 = 63.281$
$y_4 = 6.250 \times 11 + 781 = 69.531$
$y_5 = 6.250 \times 12 + 781 = 75.781$
$y_6 = 6.250 \times 14 + 781 = 88.281$
$y_7 = 6.250 \times 15 + 781 = 94.531$

	I	N	R	E	B	U	S	
Y	3	(8)	(2)	(8)	1	(2)	5	X
	(4)	(4)	(5)	3	1	2	(5)	X
	6	3	2	8	1	2	5	√
	6	9	5	3	1	2	5	√
	(7)	(5)	(7)	8	1	2	(5)	X
	(8)	(8)	(2)	(8)	1	(2)	5	X
	9	4	5	3	1	2	5	√

Setelah dianalisis lebih mendalam, diperoleh $Y =$ 6.328.125.

$X - 1 = 10^2 \times x + 25 - 1$
$\quad\quad = 10^2 \times x + 24$

$X - 1 = 2^2(5^2 \times x + 6)$ terbagi oleh 2^2, sehingga $5^2 \times x + 6$ harus terbagi oleh 2^5.

Karena $25 \times x + 6$ harus terbagi oleh 32, maka pasti x adalah bilangan genap.

$x = 2 \rightarrow (25 \times 2 + 6) \nmid 32$
$x = 4 \rightarrow (25 \times 4 + 6) \nmid 32$
$x = 6 \rightarrow (25 \times 6 + 6) \nmid 32$
$x = 10 \rightarrow (25 \times 10 + 6) | 32$
$x = 42 \rightarrow (25 \times 42 + 6) | 32$
$x = 74 \rightarrow (25 \times 74 + 6) | 32$
$\boldsymbol{x = 32p + 10}$ [illegible]
$\boldsymbol{(25 \times}$ [illegible] $\boldsymbol{+ 10) + 6)) | 32}$

$X = \overbrace{\text{[illegible]}\ T\ M\ O\ D}^{x}\ \overbrace{U\ S}^{z}$
$X =$ [illegible] $T\ M\ O\ D\ 2\ 5$

Karena $Y = 6\,3\,2\,8\,1\,2\,5$ dan $X = 8\,5\,T\ M\ O\ D\ 2\,5$, maka huruf $T, M, O,$ dan D berarti mewakili angka $0, 4, 7,$ atau 9.

Selanjutkan akan kita cari bilangan $x = 32p + 10$ yang dapat memenuhi bentuk bilangan $8\,5\,T\ M\ O\ D\ 2\,5$ yang untuk masing-masing huruf $T, M, O,$ dan D akan mewakili angka $0, 4, 7,$ atau 9.

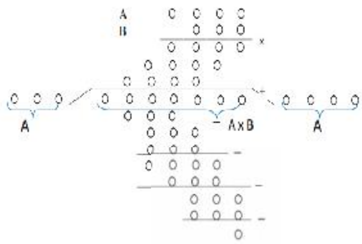
$x = 850.794 \rightarrow$
$\boldsymbol{X = 85.079.425}$

Untuk kasus $z = 25$, diperoleh: $X = 85.079.425$ dan $Y =$ 6.328.125.

Jadi solusi dari puzzle perkalian di atas adalah:

$\boldsymbol{X = 85.079.425}$ dan
$\boldsymbol{Y = 6.328.125.}$

9. Temukan bilangan A dan B yang memenuhi gambar berikut:



Bilangan $A \times B$ adalah bilangan kelipatan sembilan ditambah dua, di mana A dan B tidak berisi angka 0.

Strategi penyelesaian:

a. Mencari pola. Hasil kali pada langkah pertama dan ketiga pada operasi pembagian harus dimulai dengan angka 9.
Karena bilangan yang harus habis terbagi atau mendekati habis terbagi oleh bilangan B merupakan bilangan dengan empat angka, sedangkan bilangan hasil kali parsial pertama dan ketiga (perkalian bilangan B dengan angka pertama dan dengan angka ketiga) hanya berupa bilangan berdigit

tiga, jadi bilangan ini harus merupakan bilangan sebesar mungkin yang mendekati bilangan berdigit empat, sehingga bilangan ini harus diawali dengan angka 9.

Oleh karena itu, angka pertama dan ketiga bilangan A minimal harus 2.

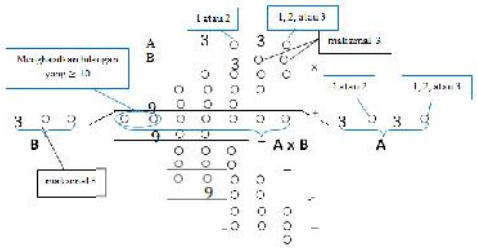
Hasil kali $A \times B$ adalah bilangan berdigit tujuh. Hal ini menunjukkan bahwa hasil kali parsial ketiga diawali oleh 9.

b. Analisis bilangan A melalui angka pertamanya.

- Jika angka pertama bilangan A adalah angka 2, maka bilangan A minimal 2.121 dan maksimal 2.122. Karena angka pertama untuk hasil kali parsial ketiga harus angka 9 dan tidak ada angka pertama untuk bilangan B yang jika bilangan A 2.121 atau 2.122 dikali dengan angka pertama bilangan B akan menghasilkan bilangan yang dimulai dengan angka 9, maka angka pertama bilangan A bukan 2.
- Jika angka pertama bilangan A adalah angka 3, maka bilangan A minimal 3.131 dan maksimal 3.133. Karena angka pertama untuk hasil kali parsial ketiga harus angka 9, maka angka pertama bilangan B harus 3. Jadi, angka pertama A kemungkinan adalah angka 3.
- Jika angka pertama A adalah 4, 5, 6, 7, 8, atau 9 silahkan dikembangkan sendiri.

Jadi, angka pertama dan ketiga bilangan A harus sama dengan 3, sedangkan angka kedua harus 1 atau 2 dan angka ketiga harus 1, 2, atau 3, serta angka pertama bilangan B harus 3.

Berdasarkan pada operasi perkalian, di mana semua hasil kali parsial merupakan bilangan dengan empat angka, maka angka kedua dan ketiga pada bilangan B maksimal 3 (karena jika lebih dari 3, maka hasil kali parsialnya akan menjadi bilangan yang lebih dari empat angka).



Karena $A \times B$ adalah bilangan kelipatan 9 ditambah 2 ($9n + 2$ berarti "kelipatan 9 ditambah 2"), maka ada beberapa bentuk pasangan bilangan yang mungkin akan menjadi solusi untuk bilangan A dan B, yaitu:

A	9m - 2	9m - 1	9m + 1	9m + 2
B	9m - 1	9m - 2	9m + 2	9m + 1

($9m - 2$ berarti "kelipatan 9 dikurangi 2")

Berikut ini salah satu cara mendapatkan pasangan bilangan tersebut:

$$A \times B = (\cdots)(9m - 1)$$
$$= 8\cdots 7m + 2$$
$$= 9\underbrace{(9m^2 \cdots 3)}_{n} + 2$$
$$= 9n + 2 \quad \text{(bilangan kelipatan 9 ditambah 2)}$$

Kemungkinan bilangan A:

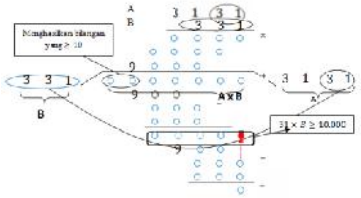
3.131	3.132	3.133	3.231	3.232	3.233
9m - 1	9m	9m + 1	9m	9m + 1	9m + 2

Kemungkinan bilangan B:

311 9m - 4	312 9m - 3	313 9m - 2	321 9m - 3	322 9m - 2

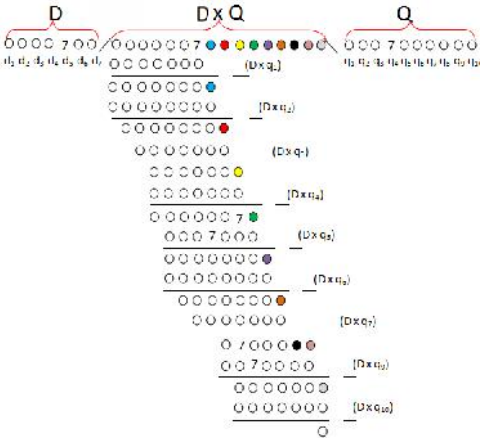
323 9m - 1	331 9m - 2	332 9m - 1

Sesuai langkah ketiga dan keempat pada operasi pembagian menunjukkan bahwa $31 \times B \geq 10.000$, sehingga B harus lebih besar dari 322. Jadi, $B = 331$.



Jadi, solusi dari puzzle ini adalah A = 3.131 dan B = 331.

10. Temukan bilangan D, Q, dan $D \times Q$ yang memenuhi gambar:



Lingkaran kecil mewakili angka-angka yang belum diketahui. Terdapat tujuh angka 7 yang diketahui letaknya. Akan tetapi, ada kemungkinan bahwa masih ada lingkaran yang mewakili angka 7.

Strategi penyelesaian:

a. Memilih notasi yang efektif.

D = Divisor (pembagi)

D = $\underset{d_1}{\circ}\ \underset{d_2}{\circ}\ \underset{d_3}{\circ}\ \underset{d_4}{\circ}\ \underset{d_5}{7}\ \underset{d_6}{\circ}\ \underset{d_7}{\circ}$

Q = Quotient (hasil bagi)

Q= $\underset{q_1}{\circ}\ \underset{q_2}{\circ}\ \underset{q_3}{\circ}\ \underset{q_4}{7}\ \underset{q_5}{\circ}\ \underset{q_6}{\circ}\ \underset{q_7}{\circ}\ \underset{q_8}{\circ}\ \underset{q_9}{\circ}\ \underset{q_{10}}{\circ}$

D x Q = Dividend (bilangan terbagi)

b. Mempertimbangkan kasus ekstrem.

$d_5 = 7$

$q_4 = 7$

$q_8 = 0$ (karena setelah bilangan keempatbelas dari bilangan terbagi diturunkan ternyata bilangan terbagi parsialnya belum dapat dibagi oleh pembagi, maka selanjutnya bilangan kelimabelas dari bilangan terbagi harus diturunkan lagi. Oleh karena itu, $q_8 = 0$.

$q_4 < q_3 = q_5 = q_7 < q_2 = q_6$ (dilihat dari hasil kali D dengan masing-masing q dan bilangan terbaginya). Karena hasil kali $q_3 \times D = q_5 \times D = q_7 \times D$ adalah bilangan berdigit tujuh terbesar yang mendekati bilangan terbagi yang berdigit delapan, sedangkan hasil kali $q_4 \times D$ bukan bilangan berdigit tujuh yang terbesar karena bilangan terbagi yang harus didekati hanya bilangan berdigit tujuh. Kemudian, hasil kali $q_2 \times D = q_6 \times D$ adalah bilangan berdigit delapan. Jadi, $q_4 < q_3 = q_5 = q_7 < q_2 = q_6$. Karena $q_4 = 7$, maka $\boldsymbol{q_3 = q_5 = q_7 = 8}$ dan $\boldsymbol{q_2 = q_6 = 9}$.

Dari $q_7 = 8$ dapat diketahui bahwa $8 \times D < 10.000.000$ (Karena $8 \times D$ merupakan bilangan dengan tujuh angka yang terbesar yang terbagi oleh D yang mendekati bilangan dengan delapan angka) dan paling kecil sama dengan $10.000.000 - 97.999 = 9.902.001$.

Oleh karena itu, $9.902.001 : 8 = 1.237.750 < D < 10.000.000 : 8 = 1.250.000$.

Jadi, $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$ atau 4, dan $d_5 = 7$

c. Membagi dalam kelompok.

Karena angka keempat dari $q_5 \times D = 8 \times D$ adalah 7, dengan ketentuan $1.237.750 <$

$D < 1.250.000$, maka dengan cara "coba-coba" mengalikan lima angka pertama bilangan D dengan 8 yang mempunyai hasil kali berupa angka 7 pada angka keempat yaitu:

1. $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$, $d_4 = 9$, $d_5 = 7$ dan $d_6 \leq 4$
2. $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 4$, $d_4 = 4$, $d_5 = 7$ dan $d_6 \leq 4$
3. $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 4$, $d_4 = 9$, $d_5 = 7$ dan $d_6 \leq 4$

d. Pada baris keenambelas, $D \times q_9$ berupa bilangan berdigit tujuh dengan angka ketiga 7. Melalui cara "coba-coba", cukup dengan memperhatikan hasil kali lima angka pertama bilangan D dengan $q_9 =$ 1,2,3,4,5,6,7,8, atau 9 yang mempunyai angka ketiga 7. Diperoleh:

1. $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$, $d_4 = 9$, $d_5 = 7$ dengan $q_9 = 2$ atau 7
2. $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 4$, $d_4 = 4$, $d_5 = 7$ dengan $q_9 = 4$
3. $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 4$, $d_4 = 9$, $d_5 = 7$ dengan tidak ada q_9

e. Baris ketigabelas pembagian menunjukkan bahwa $(800 + q_9 + 1) \times D$ adalah bilangan berdigit sepuluh, sehingga diperoleh:

1. Kasus $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$, $d_4 = 9$, $d_5 = 7$, $q_9 = 2$ atau 7
   - $q_9 = 2 \rightarrow (800 + q_9 + 1) \times D = (800 + 2 + 1) \times 12397d_6d_7 = 803 \times 1.239.7d_6d_7 < 803 \times 1.240.000 = 995.720.000.$ $(800 + q_9 + 1) \times D$ untuk $q_9 = 2$ tidak menghasilkan bilangan dengan sepuluh angka, jadi $q_9 = 2$ dikeluarkan dari kemungkinan.
   - $q_9 = 7 \rightarrow (800 + q_9 + 1) \times D = (800 + 7 + 1) \times 1.239.7d_6d_7 = 808 \times 1.239.7d_6d_7 > 808 \times 1.240.000 = 1.001.920.000.$ $(800 + q_9 + 1) \times D$ untuk $q_9 = 4$ menghasilkan bilangan dengan sepuluh angka, jadi $q_9 = 7$ memenuhi untuk tahap selanjutnya.
2. Kasus $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 4$, $d_4 = 4$, $d_5 = 7$ dengan $q_9 = 4$
   $q_9 = 4 \rightarrow (800 + q_9 + 1) \times D = (800 + 4 + 1) \times 1.244.7d_6d_7 = 805 \times 1.244.7d_6d_7 > 805 \times 1.243.000 = 1.000.615.000.$ $(800 + q_9 + 1) \times D$ untuk $q_9 = 4$ menghasilkan bilangan dengan sepuluh angka, jadi $q_9 = 7$ memenuhi untuk tahap selanjutnya.

f. Angka kedua dari hasil kali q_9q_{10} (bilangan yang ditulis dengan angka q_9 dan q_{10}) dengan D adalah angka 7, dengan kata lain kita harus menemukan bilangan $q_{10} = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,$ atau 8 agar memperoleh $q_9q_{10} \times D$ berupa bilangan berdigit delapan yang angka kedua adalah 7, sehingga untuk masing-masing kasus di atas diperoleh:

1. Kasus $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$, $d_4 = 9$, $d_5 = 7$, $q_9 = 7$

$7q_{10} \times 1.239.7d_6d_7 = (70 + q_{10}) \times (1.239.700 + d_6d_7)$
$= 86.779.000 + (q_{10} \times 1.239.7d_6d_7) + (70 \times d_6d_7)$
$q_{10} = 1 \rightarrow 71 \times 1.239.7d_6d_7 = 88.018.700 + 71 \times d_6d_7$
$q_{10} = 2 \rightarrow 72 \times 1.239.7d_6d_7 = 89.258.400 + 72 \times d_6d_7$
$q_{10} = 3 \rightarrow 73 \times 1.239.7d_6d_7 = 90.498.100 + 73 \times d_6d_7$
$q_{10} = 4,5,6,7,8,$ dan 9 silahkan dicoba sendiri.

Sehingga dari kasus ini dapat disimpulkan bahwa tidak ada nilai q_{10} yang memenuhi agar $7q_{10} \times 1.239.7d_6d_7$ mempunyai hasil kali berupa bilangan berdigit delapan yang angka kedua adalah 7.

Jadi, pada kasus $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$, $d_4 = 9$, $d_5 = 7$, dengan $\boldsymbol{q_9 = 7}$ **adalah tidak mungkin.**

2. Kasus $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 4$, $d_4 = 4$, $d_5 = 7$ dengan $q_9 = 4$

$4q_{10} \times 1.244.7d_6d_7 = (40 + q_{10}) \times (1.244.700 + d_6d_7)$
$= 49.788.000 + (q_{10} \times 1.244.7d_6d_7) + (40 \times d_6d_7)$
$q_{10} = 1 \rightarrow 41 \times 1.244.7d_6d_7 = 51.032.700 + 41 \times d_6d_7$
$q_{10} = 6 \rightarrow 46 \times 1.244.7d_6d_7 = 57.256.200 + 46 \times d_6d_7$
$q_{10} = 2,3,5,7$ dan 8 silahkan dicoba sendiri. Sehingga dari kasus ini dapat disimpulkan bahwa $q_{10} = 6$ memenuhi ketentuan agar $7q_{10} \times 1.244.7d_6d_7$ mempunyai hasil kali berupa bilangan berdigit delapan yang angka kedua adalah 7.

Jadi, $\boldsymbol{q_9 = 4}$ **mungkin menjadi bagian solusi.**

g. Pada baris kesembilan pembagian, diketahui bahwa angka ketujuh dari $898.0q_9q_{10} \times D$ adalah 7, jadi kita akan mencari nilai d_6d_7 dengan melihat hasil kali dari $898.0q_9q_{10} \times D$ yang mempunyai angka ketujuh berupa angka 7.

Kasus $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 4$, $d_4 = 4$, $d_5 = 7$, $q_9 = 4$, $q_{10} = 6$

$898.046 \times 1.243.4d_6d_7$
$= \circ\circ\circ\circ\circ\circ 7\ \circ\circ\circ\circ\circ\circ$

Nilai d_6d_7 yang mungkin menjadi bagian bilangan D:

$d_6d_7 = 11 \rightarrow$ 1.117.807.734.706
$d_6d_7 = 22 \rightarrow$ 1.117.817.613.212
$d_6d_7 = 33 \rightarrow$ 1.117.827.491.718

Diperoleh kemungkinan solusi untuk pasangan bilangan D dan Q, yaitu:

$D = d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7$	$Q = q_1q_2q_3q_4q_5q_6q_7q_8q_9q_{10}$
1.244.711 1.244.722 1.244.733	q_1.987.898.046

Selanjutnya, masih dengan cara "coba-coba" bilangan $q_1 = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ agar memenuhi hasil kali $D \times Q$ berupa bilangan berdigit enambelas yang angka ketujuh adalah 7.

D = 1.244.711 → q_1 = Tidak ada
D = 1.244.722 → q_1 = Tidak ada
D = 1.244.733 → q_1 = 6, sehingga Q = 6.987.898.046

Jadi, penyelesaian dari puzzle pembagian terakhir ini adalah

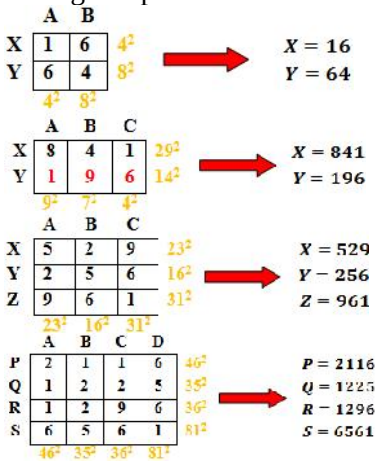
D = 1.244.733
Q = 6.987.898.046
D × Q = 8.698.067.298.491.718

KESIMPULAN

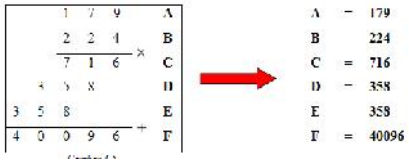
Berdasarkan pembahasan dan penelitian yang telah dipaparkan, maka dapat diperoleh kesimpulan berupa solusi puzzle sebagai berikut:

4.1.1 Puzzle bilangan kuadrat

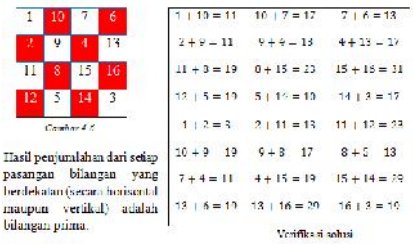
Salah satu solusi dari masing-masing sub puzzle:



4.1.2 Perkalian ajaib 20 angka (0 sampai dengan 9 muncul tepat dua kali)

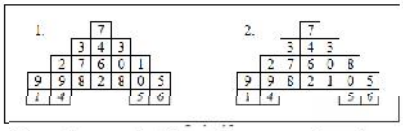


4.1.3 Puzzle bilangan prima



4.1.4 Puzzle kelipatan 7 dengan hasil penjumlahan terbesar

Diperoleh dua solusi yaitu:



4.1.5 Puzzle perkalian dan pembagian

1. Solusi puzzle *estmodus inrebus:*
   ESTMODUS = 85.079.425
   INREBUS = 6.328.125
2. Solusi puzzle perkalian dan pembagian:
   $A = 3.131 ; B = 331$
3. Solusi puzzle pembagian terakhir:
   D = 1.244.733
   Q = 6.987.898.046

D x Q = 8.698.067.298.491.718

SARAN

Adapun saran yang diberikan penulis untuk menjadi penelitian atau penulisan karya ilmiah selanjutnya, yaitu:

1. Mengangkat masalah yang lebih luas dengan tingkat kesulitan yang lebih tinggi, khususnya yang berkaitan dengan bilangan kuadrat, bilangan prima, dan bilangan kelipatan 7.
2. Pembuktian ketunggalan dari solusi yang telah ditemukan pada perkalian ajaib, puzzle "*estmodus inrebus*", puzzle perkalian dan pembagian, serta puzzle pembagian terakhir.
3. Pada puzzle bilangan prima, penulis menyebutkan bahwa ada 5920 solusi, yang mana penulis hanya menuliskan 27 solusi. Oleh karena itu, dapat diteliti lebih lanjut mengenai $5920 - 27 = 5893$ solusi lainnya.

Dafar Pustaka

Al-Qadry, Y., I. Perdana, M. Kania S. *Fungsi Heuristik Untuk Pelacakan Pada Aplikasi Kecerdasan Buatan Dalam Kasus Puzzle*. Jurusan Teknik Informatika Fakultas Teknik Sekolah Tinggi Informatika dan Teknologi.

Beiler, Albert H. 1966. *Recreations in the Theory of Numbers*. New York: Dover Publications Inc.

Eka, De. 2013. *Beda Bilangan Ganjil dan Genap*. http://puteka85.blogspot.com/2013/06/beda-bilangan-ganjil-dan-genap.html diakses 15 Nopember 2014

Foley, J., Van Dam, A., Feiner, S., Hughes, J.. 1996. *Computer Graphics Principles and Practise*. Addison-Wesley.

Frohlichstein, Jack. 1962. *Mathematical Fun, Games, and Puzzles*. New York. Dover Publications Inc.

Hernadi, Julan. 2012. *Teori Bilangan*. Handout Mata Kuliah Teori Bilangan Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Ponorogo.

Hernadi, Julan. 2013. *Teorema Fermat dan Wilson*. Handout Mata Kuliah Teori Bilangan Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Ponorogo.

Larson, Loren C. 1983. *Problem-Solving Through Problems*. New York: New York Inc.

Nindinda, Turyni. 2013. *Analisis Algoritma Genetika Pada Permainan Teka-Teki Silang*. Skripsi S-1 Teknik Informatika Fakultas Teknik dan Ilmu Komputer Universitas Komputer Indonesia.

Pratiwi, Dian. 2013. *Matematika Rekreasi*. file://localhost/E:/BUKU%20SKRIPSI/Matematika_rekreasi.htm . diakses 13 April 2013.

Posamentier, Alfred S. 2003. *Math Wonders to Inspire Teachers and Students*. Alexandria: Association for Supervision and Curriculum Development.

Schuh, Fred. 1968. *The Master Book of Mathematical Recreation*. New York: Dover Publications Inc.

Stickels, Terry. 1976. *Math Puzzles and Brainteasers Grade 6-8*. San Francisco. Jossey-Bass.

Suprijatna, Novita Nuralita. 2013. *Penerapan Algoritma Backtrak Dalam Membangkitkan Elemen Awal Permainan Sudoku*. Skripsi S-1 Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Jurusan Pendidikan Matematika Universitas Pendidikan Indonesia.

Yamin, Muhammad. 2014. *Pembagian Susun Tingkat Awal*. http://gurukatrondeso.blogspot.com/2014/11/pembagian-susun-tingkat-awal.html diakses 15 Nopember 2014

Zed, Mestika. 2008. *Metode Penelitian Kepustakaan*. Jakarta: Yayasan Obor Indonesia.