

# BAB 1 PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang Masalah

Pemodelan matematika merupakan bidang matematika yang berusaha untuk merepresentasikan dan menjelaskan masalah dunia nyata dalam pernyataan matematik. Representasi matematika yang dihasilkan dari proses ini dikenal sebagai model matematika. Salah satu model matematika masalah dunia nyata adalah laju pertumbuhan atau penyusutan yang disajikan dalam bentuk

$$\frac{dN(t)}{dt} = \mu N(t) \quad (1.1.1)$$

dengan  $N(t)$  menotasikan besar populasi pada waktu  $t$  dan  $\mu$  merupakan laju pertumbuhan atau penyusutan.

Model (1.1.1) merupakan salah satu bentuk paling sederhana persamaan diferensial. Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat derivatif-derivatif dari sebuah fungsi yang tak diketahui. Dengan memperhatikan variabel bebas yang terlibat, terdapat dua bentuk persamaan diferensial yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang melibatkan hanya satu variabel bebas. Sedangkan persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang melibatkan lebih dari satu variabel bebas.

Persamaan diferensial dikatakan mempunyai orde  $n$  jika orde derivatif tertinggi yang terlibat adalah  $n$ . Jika orde derivatif tertinggi yang terlibat adalah dua, maka persamaan diferensial tersebut dikatakan persamaan diferensial orde dua. Persamaan diferensial dikatakan linear jika tidak terdapat perkalian antara variabel bebas dan variabel terikat dalam satu suku.

Persamaan diferensial linear orde dua memiliki bentuk

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x) \quad (1.1.2)$$

dengan  $a_2(x)$ ,  $a_1(x)$ ,  $a_0(x)$  adalah koefisien. Jika koefisien tersebut berupa konstanta maka persamaan (1.1.2) merupakan persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien konstanta. Sedangkan jika koefisien tersebut berupa fungsi dari  $x$  maka persamaan (1.1.2) merupakan persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien variabel. Jika  $r(x) = 0$  maka persamaan (1.1.2) dinamakan homogen sedangkan jika  $r(x) \neq 0$  maka persamaan (1.1.2) dikatakan tak homogen.

Setelah mendapatkan model matematika yang berbentuk persamaan diferensial, misalkan persamaan diferensial biasa linear orde dua homogen dengan koefisien variabel, langkah selanjutnya adalah mencari penyelesaian persamaan diferensial tersebut. Penyelesaian adalah sebuah fungsi  $f(x)$  yang memenuhi persamaan diferensial, yaitu jika  $f(x)$  disubstitusikan untuk  $y$  dalam persamaan diferensial maka akan menghasilkan suatu pernyataan yang benar.

Penyelesaian persamaan diferensial dapat diperoleh menggunakan beberapa metode. Antara lain metode pemisahan variabel, metode Euler Cauchy, metode variasi parameter, metode deret pangkat, dan lain sebagainya. Metode pemisahan variabel adalah metode penyelesaian yang dapat diterapkan pada persamaan diferensial linear orde pertama. Metode Euler Cauchy dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear orde dua homogen dengan koefisien variabel. Metode variasi parameter dapat digunakan

untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear orde dua tak homogen. Metode deret pangkat dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear orde dua homogen dengan koefisien variabel. Dalam bidang penerapan persamaan diferensial yang sering muncul adalah persamaan diferensial linear orde dua homogen dengan koefisien variabel. Oleh karena itu metode yang tepat digunakan adalah metode deret pangkat.

Metode deret pangkat ini dapat diterapkan di sekitar titik biasa dan di sekitar titik singular. Suatu titik  $x_0$  dikatakan titik biasa jika  $a_2(x_0) \neq 0$ . Tetapi jika  $a_2(x_0) = 0$  maka titik tersebut disebut titik singular. Titik singular pada persamaan diferensial orde dua adalah titik-titik dimana suatu interval tertutup tidak mempunyai derivatif kedua.

Persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien variabel yang akan dibahas adalah persamaan diferensial Legendre, persamaan diferensial Hermite dan persamaan diferensial Bessel. Ketiga persamaan diferensial ini biasa disebut persamaan diferensial khusus. Persamaan diferensial khusus tersebut akan diselesaikan dengan metode deret pangkat di sekitar titik biasa dan di sekitar titik singular yang regular. Persamaan diferensial khusus yang dapat diselesaikan dengan metode deret pangkat di sekitar titik biasa adalah persamaan Legendre dan persamaan Hermite. Persamaan diferensial khusus yang dapat diselesaikan dengan metode deret pangkat di sekitar titik singular yang regular adalah persamaan Bessel.

Dari kondisi diatas, bagaimana langkah-langkah penyelesaian persamaan diferensial linear orde dua homogen dengan koefisien variabel menggunakan metode deret pangkat di sekitar titik biasa dan di sekitar titik singular regular. Bagaimana penyelesaian persamaan diferensial khusus yang diperoleh dari metode deret pangkat di sekitar titik biasa maupun di sekitar titik singular yang regular.

## 1.2 Rumusan Masalah

Dari latar belakang diatas maka permasalahan yang dapat dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana langkah-langkah penyelesaian persamaan diferensial linear orde dua dengan metode deret pangkat di sekitar titik biasa?
2. Bagaimana penerapan metode deret pangkat di sekitar titik biasa untuk menyelesaikan persamaan diferensial Legendre dan Hermite?
3. Bagaimana langkah-langkah penyelesaian persamaan diferensial linear orde dua dengan metode deret pangkat di sekitar titik singular yang regular?
4. Bagaimana penerapan metode deret pangkat di sekitar titik singular yang regular untuk menyelesaikan persamaan diferensial Bessel?
5. Bagaimana interpretasi penyelesaian dari persamaan diferensial Legendre, Hermite dan Bessel secara grafis?

## 1.3 Tujuan Penulisan

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah

1. Untuk mengetahui penyelesaian dengan menggunakan metode deret pangkat di sekitar titik biasa,
2. Untuk mengetahui penerapan metode deret pangkat di sekitar titik biasa untuk menyelesaikan persamaan diferensial Legendre dan Hermite,

3. Untuk mengetahui penyelesaian dengan menggunakan metode deret pangkat di sekitar titik singular yang regular,
4. Untuk mengetahui penerapan metode deret pangkat di sekitar titik singular yang regular untuk menyelesaikan persamaan diferensial Bessel,
5. Untuk mengetahui interpretasi penyelesaian dari persamaan diferensial Legendre, Hermite dan Bessel secara grafis.

#### **1.4 Batasan Masalah**

Penulisan skripsi ini memiliki batasan sebagai berikut:

1. Pada penelitian ini persamaan diferensial yang dibahas adalah persamaan diferensial linear orde dua yang homogen dengan koefisien variabel.
2. Kasus yang dibicarakan dalam tulisan ini mengenai penyelesaian bentuk umum persamaan diferensial khusus yang terdapat dalam bidang penerapan. Persamaan diferensial khusus yang dimaksud memiliki penyelesaian di sekitar titik biasa atau di sekitar titik singular yang regular. Untuk persamaan diferensial khusus yang dapat diselesaikan di sekitar titik biasa antara lain persamaan Legendre dan persamaan Hermite. Sedangkan untuk persamaan diferensial khusus yang diselesaikan di sekitar titik singular yang regular adalah persamaan Bessel. Untuk titik singular yang tak regular tidak dibahas dalam penelitian ini.
3. Metode penyelesaian yang digunakan adalah metode deret pangkat. Untuk menyelesaikan persamaan diferensial khusus di sekitar titik biasa menggunakan metode deret pangkat di sekitar titik biasa. Untuk persamaan diferensial khusus di sekitar titik singular yang regular menggunakan metode deret pangkat di sekitar titik singular yang regular.

#### **1.5 Manfaat Penelitian**

Penelitian ini diharapkan dapat bermanfaat bagi semua pihak. Bagi penulis sendiri penelitian ini sebagai sarana untuk mengembangkan pengetahuan dan ketrampilan pada bidang matematika keilmuan khususnya persamaan diferensial dan deret pangkat. Bagi lembaga khususnya prodi semoga penelitian ini dapat dijadikan sebagai sarana pengembangan wawasan keilmuan pada pada bidang matematika khususnya persamaan diferensial dan deret pangkat. Dengan adanya penelitian ini diharapkan dapat menambah wawasan bagi para pembaca bahwa matematika sangat penting terutama penerapan-penerapannya dalam bidang-bidang tertentu.

#### **1.6 Metode Penelitian**

##### **1. Jenis Penelitian**

Jenis penelitian yang digunakan penulis adalah penelitian kepustakaan atau studi pustaka. Studi pustaka ialah serangkaian kegiatan yang berkenaan dengan metode pengumpulan data pustaka, membaca dan mencatat serta mengolah bahan penelitian. Penelitian kepustakaan merupakan penelitian yang dilakukan dengan menggunakan literatur berupa buku, catatan, kisah sejarah, ataupun hasil laporan penelitian sebelumnya yang memiliki relevansi dengan topik pembahasan.

##### **2. Data dan Sumber Data**

Data yang diperlukan dalam penelitian ini merupakan data yang bersifat tekstual meliputi deret, deret pangkat, definisi titik biasa dan titik singular, persamaan diferensial beserta beberapa metode penyelesaiannya, persamaan Laplace dalam koordinat polar, persamaan Laplace dalam koordinat bola dan deret Frobenius. Informasi untuk penelitian ini dikumpulkan dari buku-buku acuan mengenai matematika, jurnal-jurnal dan artikel di internet.

### 3. Teknik Pengumpulan Data

Pengumpulan data merupakan proses pengadaan data untuk keperluan penelitian. Pengumpulan data adalah prosedur yang sistematis dan standar untuk memperoleh data yang diperlukan. Untuk memperoleh data, penulis menggunakan langkah-langkah *Library Research* yaitu setiap penelitian memerlukan bahan yang bersumber dari perpustakaan. Penulis menggunakan metode dokumenter, yaitu mencari data mengenai hal-hal atau variabel berupa catatan, buku-buku, jurnal penelitian yang relevan dengan permasalahan penulis.

### 4. Teknik Analisis Data

Adapun langkah-langkah yang dilakukan penulis dalam menganalisis data adalah sebagai berikut:

1. Menguraikan langkah-langkah penyelesaian persamaan diferensial linear orde dua dengan metode deret pangkat baik di sekitar titik biasa atau di sekitar titik singular.
2. Menerapkan metode deret pangkat untuk menyelesaikan persamaan diferensial khusus dengan
  - a. Menunjukkan model masing-masing persamaan diferensial khusus dalam kehidupan nyata.
  - b. Mencari penyelesaian masing-masing persamaan diferensial khusus dengan metode deret pangkat.
  - c. Merepresentasikan masing-masing penyelesaian dari persamaan diferensial khusus melalui grafis.
  - d. Menyimpulkan hasil penyelesaian yang diperoleh dari masing-masing persamaan diferensial khusus.

Dalam proses analisis data dalam penelitian ini menggunakan software Maple13.

## 1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

### Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penulisan, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

### Bab II Kajian Pustaka

Bagian ini terdiri dari konsep-konsep yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang deret, deret pangkat, titik biasa dan titik singular, persamaan diferensial dengan penyelesaiannya,

persamaan Laplace dalam koordinat polar, persamaan Laplace dalam koordinat bola, deret Frobenius dan fungsi gamma.

### Bab III Pembahasan

Dalam bab ini dipaparkan hasil kajian meliputi langkah-langkah penyelesaian persamaan diferensial linear orde dua dengan menggunakan deret pangkat di sekitar titik biasa dan titik singular yang regular. Penerapan metode deret pangkat di sekitar titik biasa dan titik singular yang regular untuk menyelesaikan persamaan Legendre, persamaan Hermite dan persamaan Bessel.

### Bab IV Penutup

Pada bab ini dibahas mengenai kesimpulan dan saran.

