

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori integral merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang bersifat analisis. Teori integral erat kaitannya dengan bidang ilmu lainnya baik matematika maupun non matematika. Seiring berjalan waktu teori integral terus mengalami perkembangan. Pada tahun 1850, Bernhard Riemann memperkenalkan teori integral dengan menggunakan partisi pada suatu interval sebagai dasar pengembangannya yang dikenal sebagai teori integral Riemann.

Integral Riemann merupakan jenis integral yang didefinisikan secara konstruktif (Maknawi dan Muslich, 2009). Riemann memulai dengan memecah interval menjadi subinterval-subinterval, kemudian Riemann menentukan jumlahan atas dan jumlahan bawah yang selanjutnya disebut jumlahan atas Riemann dan jumlahan bawah Riemann. Kemudian diperoleh limit dari jumlahan atas Riemann dan jumlahan bawah Riemann. Selanjutnya integral Riemann didefinisikan sebagai limit dari jumlahan atas Riemann yang nilainya sama dengan limit jumlahan bawah Riemann.

Pada tahun 1902 seorang matematikawan Prancis yang bernama Henri Lebesgue mencermati fungsi yang tidak terintegral Riemann. Menurut Maknawi dan Muslich (2009) salah satu fungsi yang tidak terintegral Riemann adalah fungsi Dirichlet yang didefinisikan

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \text{rasional} \\ 0, & x \in \text{irrasional} \end{cases}$$

Lebesgue memperkenalkan suatu teori integral baru dengan terlebih dahulu menyusun teori ukuran yang dikenal dengan Ukuran Lebesgue (Lesnussa dkk, 2012). Teori integral tersebut selanjutnya dikenal sebagai integral Lebesgue.

Menurut Yang dkk (2009) koleksi semua fungsi yang terintegral Riemann merupakan himpunan bagian dari fungsi yang terintegral Lebesgue. Oleh karena itu integral Lebesgue merupakan konsep integral yang lebih umum daripada integral Riemann. Dengan demikian, integral Lebesgue dapat mengatasi beberapa permasalahan seperti fungsi Dirichlet di atas yang tidak dapat diselesaikan dengan menggunakan integral Riemann.

Pembahasan tentang integral Riemann dan integral Lebesgue banyak dilakukan hingga sekarang, salah satunya membahas hubungan diantara keduanya. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk mengkaji lebih dalam terkait hubungan antara integral Riemann dan integral Lebesgue meliputi konstruksi integral Lebesgue, serta syarat yang harus dipenuhi oleh fungsi yang terintegral Lebesgue agar fungsi tersebut terintegral Riemann.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas maka permasalahan yang dapat dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana konstruksi integral Lebesgue dan hubungannya dengan integral Riemann?
2. Bagaimana syarat suatu fungsi yang terintegral Lebesgue agar terintegral Riemann?

1.3 Tujuan Kajian

Berdasarkan rumusan masalah maka tujuan kajian pada penulisan ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk mengetahui definisi integral Lebesgue dan hubungannya dengan integral Riemann.
2. Untuk mengetahui syarat suatu fungsi yang terintegral Lebesgue agar terintegral Riemann.

1.4 Kegunaan Kajian

Penelitian ini diharapkan dapat bermanfaat bagi semua pihak. Bagi penulis sendiri, penelitian ini digunakan sebagai sarana menambah wawasan dan keterampilan pada ilmu pengetahuan khususnya ilmu matematika integral Riemann dan integral Lebesgue. Bagi pembaca, penelitian ini diharapkan dapat menambah wawasan dan dapat digunakan sebagai referensi penelitian lebih lanjut tentang teori integral yang ada. Bagi lembaga, hasil dari penelitian ini diharapkan dapat menambah kapustakaan di Universitas Muhammadiyah Ponorogo khususnya program studi Pendidikan Matematikasehingga dapat dijadikan sebagai sarana pengembang wawasan keilmuan.

1.5 Metode Kajian

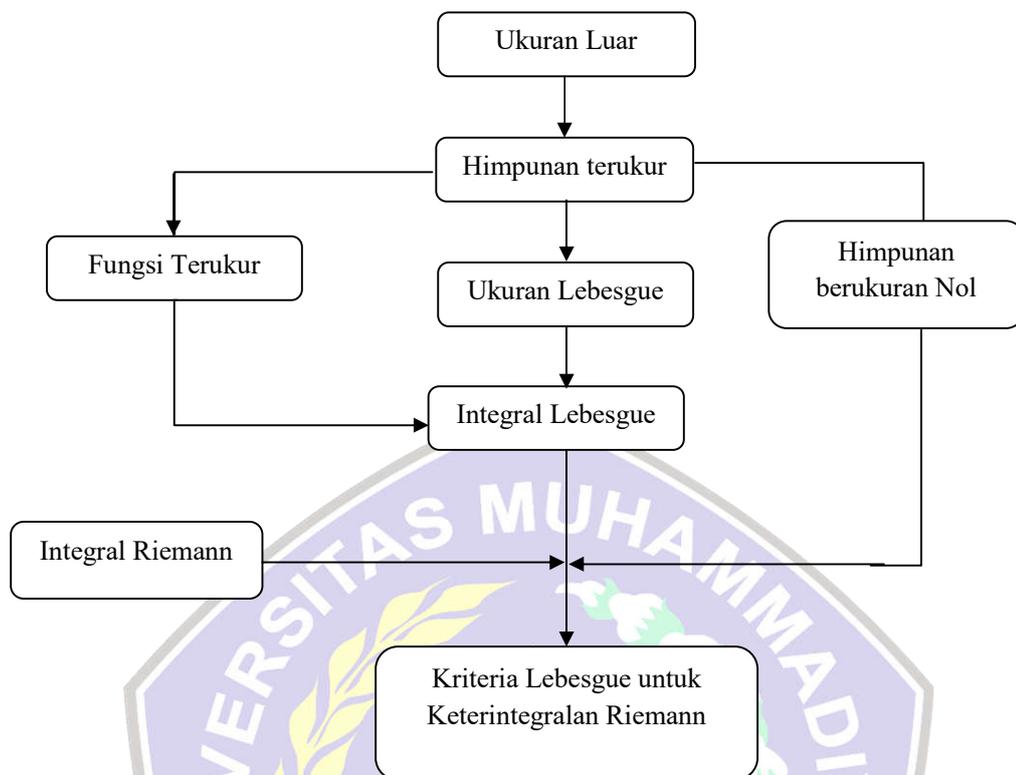
Jenis penelitian yang digunakan adalah penelitian kepustakaan atau studi literatur. Studi pustaka meliputi kegiatan yang berkaitan dengan metode pengumpulan data pustaka, membaca buku-buku, jurnal yang berkaitan dengan judul penelitian ini dan mencatatnya serta mengolah data penelitian yang didapatkan.

Pustaka yang digunakan peneliti sebagai bahan rujukan utama adalah buku yang berjudul "*Analisis Real Elementer*" yang ditulis oleh Julian Hernadi dan buku yang berjudul "*Introduction To Real Analysis*" edisi keempat yang ditulis R.G Bartle dan D.R Sherbet dan buku yang berjudul "*Real Analysis*" edisi keempat yang ditulis H.L. Royden dan P.M. Fitzpatrick.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam menganalisis data adalah sebagai berikut:

- a. Menjelaskan beberapa definisi, sifat dan teorema yang menjadi dasar pembahasan meliputi ukuran luar, himpunan terukur, fungsi terukur, dan ukuran Lebesgue.
- b. Membahas konstruksi integral Lebesgue yang kemudian dianalisis hubungan dengan integral Riemann.
- c. Selanjutnya dianalisis syarat-syarat yang harus dipenuhi suatu fungsi yang terintegral Lebesgue agar dapat terintegral Riemann.

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini dijelaskan pada kerangka berfikir di bawah ini:



Gambar 1.1 Kerangka Berfikir

1.6 Definisi Istilah

Berikut diberikan definisi-definisi beberapa istilah kunci yang sering digunakan pada skripsi ini.

1. Ukuran Luar adalah infimum dari jumlahan panjang interval terbuka dimana gabungan dari interval tersebut memuat himpunan yang dimaksud.
2. Himpunan dikatakan terukur jika tertutup dalam operasi komplemen dan gabungan himpunan terbilang.
3. Fungsi Terukur adalah fungsi yang didefinisikan pada himpunan terukur dan untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ himpunan $\{x \in E : f(x) > \alpha\}$ terukur.
4. Fungsi Sederhana adalah kombinasi linear fungsi karakteristik pada himpunan terukur.
5. Fungsi tangga adalah kombinasi linear fungsi karakteristik pada suatu interval.
6. Fungsi Dirichlet adalah fungsi yang bernilai 0 dan 1.
7. Ukuran Lebesgue adalah ukuran luar yang domainnya dibatasi pada koleksi semua himpunan terukur.
8. Integral Lebesgue merupakan integral yang didefinisikan supremum dan infimum dari integral fungsi sederhana bernilai sama.