BAB 2
KAJIAN PUSTAKA

2.1 Kajian Teori

2.1.1 Penalaran Matematis

Math Glossary (dalam Azmi, 2013: 11) menyatakan, penalaran matematis adalah berpikir secara logis dalam menyelesaikan masalah matematika. Berpikir logis ini diartikan sebagai berpikir menurut suatu pola tertentu atau menurut logika tertentu dalam menyelesaikan masalah. Lithner (2008) juga mendefinisikan penalaran matematis sebagai garis pemikiran atau cara berfikir yang diadopsi untuk menghasilkan pernyataan dan kesimpulan untuk menyelesaikan masalah. Karena setiap individu mempunyai cara tertentu dalam memroses suatu permasalahan. Keraf (Shadiq, 2014) mengungkapkan penalaran matematis sebagai proses berfikir yang menghubungkan fakta-fakta atau evidensi-evidensi yang diketahui menuju pada suatu kesimpulan. Fakta-fakta tersebut berpengaruh pada kuantitas dan kualitas dari hasil kegiatan belajar siswa.

Brodie (2010) menyatakan bahwa penalaran matematis adalah penalaran mengenai objek matematika. Objek matematika dalam hal ini adalah objek-objek dasar yang sering dipelajari dalam matematika yang meliputi fakta, konsep, operasi ataupun relasi dan prinsip. Dari beberapa pendapat ahli tersebut, dapat ditarik bahwa penalaran matematis adalah suatu aktivitas atau proses penarikan kesimpulan yang ditandai dengan adanya langkah-langkah proses berpikir.

2.1.2. Kemampuan Penalaran Matematis

Menurut Subanidro (2012: 811) kemampuan penalaran matematik adalah kemampuan untuk menghubungkan antara ide-ide atau objek-objek matematika, membuat, menyelidiki dan mengevaluasi dugaan matematik, dan mengembangkan argumen-argumen dan buktibukti matematika untuk meyakinkan diri sendiri dan orang lain bahwa dugaan yang dikemukakan adalah benar. Senada dengan hal itu Hartati (2017) menyatakan bahwa kemampuan penalaran matematis merupakan salah satu bagian yang utama yang hendak dicapai dalam tujuan pembelajaran matematika.

Anjar dan Sembiring (dalam Mulia, 2014) seseorang dikatakan melakukan penalaran matematika jika dia dapat melakukan validasi, membuat konjektur, deduksi, justifikasi, dan eksplorasi.

a. Validasi yaitu menerapkan dan menguji suatu pernyataan pada kasus-kasus khusus tertentu.
b. Konjektur yaitu membuat dugaan yang berdasarkan penalaran logika ataupun fakta.
c. Deduksi yaitu mencari dan membuktikan akibat-akibat yang diimplikasikan oleh suatu pernyataan.
d. Justifikasi yaitu membuktikan suatu pernyataan dengan didasarkan pada definisi, teorema ataupun lemma yang sudah dibuktikan sebelumnya.
e. Eksplorasi yaitu mengutak atik segala kemungkinan.

Berdasarkan Departemen Pendidikan Nasional dalam Peraturan Dikdasmen No. 506/C/PP/2004 (Wardhani, 2008:14) diuraikan bahwa indikator siswa yang memiliki kemampuan penalaran matematis yaitu :

1) Mengajukan dugaan.
2) Melakukan manipulasi matematika.
3) Menyusun bukti, memberikan alasan/ bukti terhadap kebenaran solusi.
4) Menarik kesimpulan suatu pernyataan.
5) Memeriksa kesahihan suatu argumen.
6) Menemukan pola atau sifat dari gejala matematis untuk membuat generalisasi.

Menurut NCTM (2000) standar kemampuan penalaran matematis meliputi :

1) Mengenal penalaran sebagai aspek mendasar matematika.
2) Membuat dan menyelidiki dugaan matematika.
3) Mengembangkan dan mengevaluasi argumen matematika.
4) Memilih dan menggunakan berbagai tipe penalaran.

Menurut Permendikbud Nomor 58 tahun 2014 (dalam Depdikbud) tentang aktifitas yang dinilai di dalam kemampuan penalaran matematika siswa meliputi :

1) Mengajukan dugaan.
2) Menarik kesimpulan dari suatu pernyataan.
3) Memberikan alternatif bagi suatu argumen.
4) Menemukan pola pada suatu gejala.

Berdasarkan uraian-uraian di atas tentang indikator-indikator kemampuan penalaran matematis, maka diperoleh kesimpulan tentang indikator kemampuan penalaran matematis yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1) Kemampuan mengajukan dugaan.
2) Kemampuan melakukan manipulasi matematika
3) Menyusun bukti, memberikan alasan atau bukti terhadap kebenaran solusi.
4) Menarik kesimpulan dari suatu pernyataan yang ada.
5) Kemampuan memeriksa kesahihan suatu argumen.
6) Kemampuan menemukan pola atau sifat dari gejala matematis untuk membuat generalisasi.

Indikator kemampuan penalaran matematis yang akan digunakan dalam penelitian ini mengacu pada indikator penalaran menurut Departemen Pendidikan Nasional dalam Peraturan Dikdasmen No. 506/C/PP/2004 (Wardhani, 2008:14), yang dijabarkan pada tabel berikut :

Aspek	**Indikator**
Mengajukan dugaan	Siswa dapat memikirkan atau merumuskan suatu kebenaran sebelum dilakukan analisis.
Melakukan manipulasi matematika	Siswa dapat melakukan proses rekayasa matematika, untuk memudahkan suatu

	perhitungan.
Menyusun bukti, memberikan alasan atau bukti terhadap kebenaran solusi.	Siswa dapat memberikan penguatan pada suatu pernyataan yang sudah diketahui kebenarannya.
Menarik kesimpulan dari suatu pernyataan yang ada.	Siswa dapat menarik kesimpulan dari hasil akhir yang diperoleh, yang dijadikan sebagai kesimpulan tersebut.
Memeriksa kesahihan suatu argumen.	Siswa dapat menyelidiki tentang kebenaran dari suatu pernyataan yang ada.
Menemukan pola atau sifat dari gejala matematis untuk membuat generalisasi.	Siswa dapat menemukan pola atau cara dari suatu pernyataan yang ada, kemudian mampu menggunakan pola-pola yang sudah ditemukan untuk menyelesaikan permasalahan sehingga tercapai tujuan yang akan dicapai.

Tabel 1. Bentuk-bentuk Penalaran Matematis.

2.1.3 Matriks (Perkalian Matriks dengan Matriks)

Kompetensi Dasar	Standar Kompetensi
3.3 Menjelaskan matriks, jenis-jenis matriks, dan kesamaan matriks dengan menggunakan masalah kontekstual dan melakukan operasi pada matriks yang meliputi penjumlahan, pengurangan, perkalian skalar, dan perkalian, serta transpos. 4.3 Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan matriks dan oprasinya.	3.3.4 Mendefinisikan operasi perkalian matriks 4.3.1 Menyelesaikan masalah kontekstual dengan menggunakan operasi-operasi matriks

2.1.3.1 Pengertian Perkalian Matriks dengan Matriks.

Perkalian matriks adalah mengalikan tiap elemen pada baris matriks sebelah kiri dengan tiap elemen pada kolom matriks sebelah kanan, kemudian hasilnya dijumlahkan. Dua matriks A dan B dapat dikalikan jika jumlah kolom matriks A (matriks kiri) sama dengan jumlah baris matriks B (matriks kanan). Ordo hasil perkalian matriks A_{mxn} dengan B_{nxp}, misalnya matriks C yang akan berordo mxp (seperti permainan domino).

$$\boxed{A_{m\,x\,n} \cdot B_{n\,x\,p} = C_{m\,x\,p}}$$

Cara mengalikan matriks A dan B yaitu dengan menjumlahkan setiap perkalian elemen pada baris matriks A dengan elemen kolom matriks B dan hasilnya diletakkan sesuai dengan baris dan kolom pada matriks C (matriks hasil perkalian).

Misal : $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $B=\begin{bmatrix} p & r & t \\ q & s & u \end{bmatrix}$ maka :

AB = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & r & t \\ q & s & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap+bq & ar+bs & at+bu \\ cp+dq & cr+ds & ct+du \end{bmatrix}$

Contoh 1: Diketahui $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 7 & 9 \end{bmatrix}$ dan $D=\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$.

Tentukan :

a. AB b. AC c. AD

Jawab : a. AB = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15+12 \\ 5+24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 29 \end{bmatrix}$

b. AC tidak dapat dikalikan, karena banyaknya kolom matriks A ≠ banyaknya baris matriks

c. AD = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15+14 & 18+16 \\ 5+28 & 6+32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 34 \\ 33 & 38 \end{bmatrix} \ldots$

Contoh 2: Diketahui $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ dan $C=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Tentukan :

a. AB b. BA c. BC d. AC e. (AB)C

f. A(BC) g. B + C h. A(B + C) i. AB + AC

j. AI k. IA

Jawab : a. AB = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-4 & 0+10 \\ 0-6 & 0+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -6 & 15 \end{bmatrix}$

b. BA = $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+0 & 8+0 \\ -2+0 & -4+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -2 & 11 \end{bmatrix}$

c. BC = $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12+0 & -8+0 \\ -6+5 & 4+20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ -1 & 24 \end{bmatrix}$

d. AC = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & -2+8 \\ 0+3 & 0+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$

e. (AB)C = $\begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -6 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+10 & 0+40 \\ -18+15 & 12+60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 40 \\ -3 & 72 \end{bmatrix}$

f. A(BC) = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 & -8 \\ -1 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12-2 & -8+48 \\ 0-3 & 0+72 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 40 \\ -3 & 72 \end{bmatrix}$

g. B + C = $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3 & 0+(-2) \\ -2+1 & 5+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$

h. A(B + C) = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-4 & -2+18 \\ 0-3 & 0+27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 16 \\ -3 & 27 \end{bmatrix}$

i. AB + AC = $\begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -6 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15+14 & 18+16 \\ 5+28 & 6+32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 34 \\ 33 & 38 \end{bmatrix}$

j. AI = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 0+2 \\ 0+0 & 0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \ldots$

k. IA = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+0 \\ 0+0 & 0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \ldots$

Sifat-sifat perkalian matriks :
1. Umumnya tidak komutatif (AB $\neq$ BA).
2. Asosiatif : (AB)C = A(BC).
3. Distributif kiri : A(B + C) = AB + AC.
   Distributif kanan : (B + C)A = BA + CA.
4. Identitas : IA = AI = A.
5. k(AB) = (kA)B.

2.1.3.2 Penerapan Perkalian Matriks dengan Matriks.

Beberapa permasalahan dalam kehidupan sehari-hari dapat diselesaikan dengan perhitungan yang melibatkan perkalian matriks dengan matriks. Pada umumnya permasalahan tersebut berkaitan dengan masalah aritmetika sosial, misalnya menentukan harga satuan barang, menentukan total harga, dan lain sebagainya. Permasalahan sehari-hari tersebut biasanya disajikan dalam bentuk soal cerita. Langkah-langkah dalam menyelesaikan soal cerita tentang perkalian matriks dengan matriks adalah sebagai berikut :

1. Mengubah kalimat-kalimat pada soal cerita menjadibeberapa kalimat matematika (model matematika), sehingga membentuk perkalian matriks dengan matriks.
2. Menyelesaikan perkalian matriks dengan matriks.
3. Menggunakan penyelesaian yang diperoleh untuk menjawab pertanyaan pada soal cerita.

Berikut disajikan contoh soal dan langkah-langkah penyelesaian soal cerita tentang perkalian matriks dengan matriks :

Soal : Ketika jam istirahat Anto dan Tomi membeli makanan di kantin sekolah. Anto menghabiskan 4 buah kue dan 2 gelas es jeruk. Tomi menghabiskan 3 buah kue dan 1 gelas es jeruk. Harga kue per buah dan es jeruk per gelas masing-masing Rp. 100,00 dan Rp. 250,00. Berapakah jumlah uang yang harus dibayarkan oleh Anto, dan oleh Tomi?

Penyelesaian :

Misalkan : Harga kue per buah = x dan harga es jeruk per gelas = y

Kalimat matematika dari soal di atas adalah :

$$\begin{cases} 4x + 2y \\ 3x + y \end{cases}$$

Selanjutnya, selesaikan dengan menggunakan salah satu metode penyelesaian, dengan aturan perkalian matriks dengan matriks :

	Kue	Es Jeruk
Anto	4	2
Tomi	3	1

	Harga (Rp)
Kue	100
Es Jeruk	250

Jumlah uang yang harus dibayarkan oleh Anto adalah $4\ x\ 100 + 2\ x\ 250 = 900.$

Untuk menyatakan perhitungan ini dalam bentuk matriks, diperlukan dua buah informasi, yaitu :

a. Jenis dan jumlah makanan yang dibeli oleh Anto. Informasi ini dapat ditulis dengan matriks baris sebagai berikut : $\begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}$

b. Harga setiap jenis makanan. Informasi ini dapat ditulis dengan matriks kolom sebagai berikut : $\begin{pmatrix} 100 \\ 250 \end{pmatrix}$

Dengan demikian, jumlah uang yang harus dibayar oleh Anto dapat dinyatakan sebagai :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 100 \\ 250 \end{pmatrix} = (4\ x\ 100 + 2\ x\ 250) = (400 + 500) = (900)$$

Akhirnya jumlah uang yang harus dibayarkan oleh Anto dan Tomi dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\ x\ 100 + 2\ x\ 250 \\ 3\ x\ 100 + 1\ x\ 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900 \\ 550 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan indikator menurut Departemen Pendidikan Nasional dalam Peraturan Dikdasmen No. 506/C/PP/2004 (Wardhani, 2008:14), yang dimaksud penalaran matematis pada materi matriks (perkalian matriks dengan matriks) yang akan diamati pada siswa dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Mengajukan dugaan.
   Menentukan simbol yang sesuai dengan konsep yang digunakan untuk setiap unsur yang diketahui pada soal.
2. Melakukan manipulasi matematika.

Membuat simbol misal x dan y, menentukan koefisiennya sehingga memudahkan proses perhitungannya dan memperoleh hasil yang benar.

3. Menyusun bukti, memberikan alasan atau bukti terhadap kebenaran solusi.
   Menentukan cara dalam memperoleh total yang diperoleh dengan benar dengan mensubstitusi setiap unsur yang telah diberi simbol sesuai dengan aturan perkalian matriks dengan matriks.
4. Menarik kesimpulan dari suatu pernyataan yang ada.
   Menentukan kesimpulan berdasarkan hasil akhir yang diperoleh.
5. Memeriksa kesahihan suatu argumen.
   Menuliskan langkah-langkah penyelesaian masalah dari awal sampai akhir dan menyimpulkannya dengan kata-kata.
6. Menemukan pola atau sifat dari gejala matematis untuk membuat generalisasi.
   Menentukan pola jika siswa dapat memperoleh pola yang dimaksud.

2.2 Kajian Penelitian yang Relevan

Penelitian relevan merupakan uraian sistematis tentang hasil penelitian terdahulu yang dijadikan titik tolak penelitian dan mencoba melakukan pengulangan, merevisi, memodifikasi, adanya hubungan dengan penelitian yang akan dilakukan. Adapun penelitian yang pernah dilakukan oleh peneliti terdahulu yaitu:

a. Ulul Azmi (2013) melakukan penelitian tentang “Profil Kemampuan Penalaran Matematika dalam Menyelesaikan Masalah Matematika Ditinjau dari Kemampuan Matematika Pada Materi Persamaan Garis Lurus Kelas VIII SMP YPM 4 Bohar Sidoarjo” yang menyimpulkan bahwa siswa berkemampuan matematika tinggi tergolong cukup dalam kemampuan melakukan manipulasi matematika, tergolong baik dalam menarik kesimpulan dari pernyataan, memberikan alasan atau bukti terhadap satu atau beberapa solusi dan memeriksa kesahihan suatu argumen. Siswa berkemampuan matematika sedang tergolong cukup dalam melakukan manipulasi matematika, tergolong baik dalam menarik kesimpulan dari pernyataan, memberikan alasan terhadap satu atau beberapa solusi dan baik dalam memeriksa kesahihan suatu argumen. Siswa berkemampuan matematika rendah tergolong kurang dalam melakukan manipulasi matematika dan memberikan alasan terhadap satu atau beberapa solusi, serta tergolong baik dalam menarik kesimpulan dari pernyataan dan memeriksa kesahihan suatu argumen. Perbedaan penelitian tersebut dengan penelitian ini terletak pada materi yang digunakan yaitu materi persamaan garis lurus, sedangkan pada penelitian ini materi yang digunakan adalah materi matriks. Persamaan penelitian terdahulu dengan penelitian yang peneliti lakukan sekarang adalah keduanya sama-sama ingin mengetahui kemampuan penalaran matematisnya.
b. Lizza Ulfa Fauziah (2016) melakukan penelitian tentang “Penalaran Logis dalam Memecahkan Masalah Matematika Pokok Bahasan Aritmatika Sosial Pada Siswa Kelas VII SMP Negeri 4 Jember” menyimpulkan bahwa kecenderungan siswa telah mampu memenuhi indikator penalaran logis yang diamati. Pada tahap mengumpulkan fakta, kecenderungan siswa telah mampu memahami informasi

pada soal sehingga mampu menuliskan hal-hal yang diketahui dan hal-hal yang ditanyakan pada soal secara lengkap, jelas dan benar. Pada tahap membangun dan menetapkan asumsi, kecenderungan siswa mampu menjelaskan langkah-langkah pemecahan masalah. Pada tahap menilai atau menguji asumsi, kecenderungan siswa mampu menyelesaikan permasalahan dengan langkah-langkah penyelesaian secara runtut dan jelas sesuai dengan asumsi yang mereka utarakan. Pada tahap menetapkan generalisasi, kecenderungan siswa telah mampu menemukan pola atau cara dari suatu pernyataan yang kemudian dikembangkan ke dalam kalimat matematika. Pada tahap membangun argumen yang mendukung, kecenderungan siswa mampu mengolah rumus yang mereka dapatkan dalam pembelajaran sebelumnya sehingga dapat menemukan data awal yang diberikan pada soal. Pada tahap memeriksa atau menguji kebenaran argumen, siswa yakin bahwa hasil pekerjaannya benar serta melakukan pengecekan pada tiap langkah pekerjaannya. Pada tahap menetapkan kesimpulan, siswa dapat menuliskan secara lengkap dan tepat sesuai dengan yang diharapkan pada soal. Perbedaan penelitian tersebut dengan penelitian ini terletak pada indikator penalaran matematis berdasarkan Jihad & Haris, sedangkan pada penelitian ini indikator penalaran matematis berdasarkan pada Departemen Pendidikan Nasional dalam Peraturan Dikdasmen No. 506/C/PP/2004 (Wardhani, 2008:14). Persamaan penelitian terdahulu dengan penelitian yang peneliti lakukan sekarang adalah keduanya sama-sama ingin mengetahui kemampuan penalaran matematisnya.