P R O S I D I N G

SEMINAR NASIONAL MIPA 2014
FMIPA UNIVERSITAS PADJADJARAN

PERAN ILMU DASAR

DALAM PEMBANGUNAN BERWAWASAN LINGKUNGAN

DISUSUN OLEH:
PANITIA SEMINAR NASIONAL BIDANG MIPA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS PADJADJARAN

"PERAN ILMU DASAR DALAM PEMBANGUNAN BERWAWASAN LINGKUNGAN"

1 (satu) jilid; A4

Diterbikan oleh:
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS PADJADJARAN
Jl. Raya Bandung-Sumedang KM. 21
Jatinangor – Sumedang 45363
Telp./Fax.: 022-7797712/7794545

ISBN : 978-602-72216-0-4
ISSN : 9772442242DD3

Prosiding ini dicetak pada bulan Januari 2015

SUSUNAN DEWAN REDAKSI PROSIDING SEMINAR NASIONAL BIDANG MIPA FMIPA UNPAD 2014

Daftar Isi

Perbandingan Metode Beda Hingga Pada Perhitungan Harga Opsi Asia

Abdul Aziz dan Wahyudi

Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
e-mail:abdulazizuinmlg@gmail.com
e-mail:wahyudibooleng@yahoo.co.id

Abstract

Option is a contract between two parties, one party entitles the other party to buy or sell an asset at a price and time that has been agreed previously. There are two types of option, namely call option and put option. Call option is the right to buy an asset at a certain price and time while a put option is the right to sell an asset at a specific price and time. Finite difference methods are methods that are used to approximate a differential equation. The method used in this study is the implicit, explicit and Crank-Nicholson. This study aims to determine the results of a comparative analysis of implicit finite difference methods, explicit, and Crank-Nicholson at the Asian option price calculation. From the research that has been done, it can be seen that in this case the methods that can be used to determine the price of the Asian option are an implicit finite difference method and Crank-Nicholson. The more effective in determining the price of the Asean option is a finite difference method of Crank-Nicholson, because this method provides optimal results compared with the implicit finite difference method.

Keywords: finite different method, Crank-Nicholson, option pricing, Asian option

1. Pendahuluan

Metode numerik adalah metode yang digunakan untuk mengaproksimasi solusi analitik pada suatu persamaan diferensial. Ada beberapa metode yang digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial. Untuk persamaan deferensial biasa, metode yang biasa digunakan adalah metode deret Taylor, Euler, Heun, dan sebagainya. Sedangkan untuk persamaan diferensial parsial, metode yang sering digunakan adalah metode beda hingga skema implisit, skema eksplisit, skema Crank-Nicholson dan sebagainya.

Kontrak opsi (selanjutnya disebut opsi) adalah suatu jenis kontrak antara dua pihak, satu pihak memberi hak kepada pihak lain untuk menjual atau membeli aset tertentu pada harga dan periode waktu tertentu (Niwiga, 2005).

Hull (2002) menyatakan bahwa pada tahun 1970-an, Fisher Black, Myron Sholes, dan Robert Merton menemukan solusi analitik untuk harga opsi saham. Dari solusi analitik tersebut dikembangkan sehingga didapatkan suatu persamaan yang dikenal sebagai model persamaan Black-Scholes. Model persamaan Black-Scholes ini untuk harga opsi call dan put Eropa pada saham non-dividen. Pada opsi Asia tidak terdapat solusi analitik dalam perhitungan harga opsi. Akan tetapi, terdapat rumus pendekatan atau aproksimasi yang digunakan untuk mencari harga opsi ini (Wiklund, 2012).

Andaikan f dan semua turunannya, yaitu f', f'', f''', ..., terdefinisi di dalam selang $[a,b]$. Misalkan $x_0 \in [a,b]$, maka untuk nilai-nilai x disekitar x_0 dan $x \in [a,b]$, $f(x)$ dapat diperluas (diekspansi) ke dalam deret Taylor (Munir, 2010):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^m}{m!} f^{m}(x_0) + \ldots$$

Kwok (1998) menyatakan bahwa metode beda hingga adalah salah satu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial parsial. Salah satu contoh persamaan diferensial parsial, yaitu

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\Delta S^2} = rf$$

Hull (2002) menyatakan bahwa untuk mengaproksimasi persamaan diferensial di atas dapat menggunakan metode beda hingga eksplisit dengan persamaan,

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + rj\Delta S \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta S^2 \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\Delta S^2} = rf_{i,j}$$

untuk j = 1,2,...,M-1 dan i = 0,1,2,...,N-1. Atau metode beda hingga implisit dengan persamaan,

$$\frac{f_{i+1,j}-f_{i,j}}{\Delta t}+rj\Delta S\frac{f_{i+1,j+1}-f_{i+1,j-1}}{2\Delta S}+\frac{1}{2}\sigma^2 j^2\Delta S^2\frac{f_{i+1,j+1}+f_{i+1,j-1}-2f_{i+1,j}}{\Delta S^2}=rf_{i,j}$$

Hull (2002) juga menyatakan bahwa bahwa metode beda hingga Crank-Nicholson adalah rata-rata dari metode beda hingga eksplisit dan implisit. Sehingga solusi numerik untuk permasalahan di atas dengan menggunakan metode beda hingga Crank-Nicholson, yaitu,

$$f_{i+1,j}-a_j^* f_{i+1,j-1}-b_j^* f_{i+1,j}-c_j^* f_{i+1,j+1}=a_j f_{i,j-1}+b_j f_{i,j}+c_j f_{i,j+1}-f_{i,j}$$

Option (opsi) adalah sebuah hak, tetapi bukan obligasi atau surat berharga, untuk membeli atau menjual sebuah aset yang berisiko pada suatu harga tertentu yang ditentukan selama periode tertentu. Opsi merupakan sebuah instrumen keuangan yang diantaranya memungkinkan seseorang untuk melakukan spekulasi berkaitan dengan naik atau turunnya harga dari suatu aset yang mendasari (*underlying asset*), misalnya saham perusahaan, mata uang, komoditas pertanian, dan sebaginya. Opsi merupakan suatu perjanjian antara dua pihak yaitu *writer*, sebagai penyusun kontrak opsi yang seringkali adalah sebuah *bank*, dan *holder*, sebagai pembeli opsi dengan harga pasar yang telah disepakati (*premium*). Karena nilai (harga) sebuah opsi tergantung pada nilai *underlying asset*, maka opsi-opsi dan lainnya yang berkaitan dengan instrumen keuangan dinamakan sebagai *derivatives* (Seydel, 2002).

Halim (2003) menyatakan bahwa berdasarkan periode penggunaan waktunya, opsi dibedakan menjadi dua, yaitu:

Opsi Eropa adalah opsi yang dapat digunakan hanya pada waktu jatuh tempo.

Opsi Amerika adalah opsi yang dapat digunakan sebelum waktu atau pada jatuh tempo.

Muniroh (2008) menyatakan bahwa opsi Asia merupakan gabungan dari opsi Amerika dan Eropa. Dengan opsi Asia dapat berlaku seperti opsi Eropa atau opsi Amerika. Hal yang membedakan opsi Asia dengan opsi Eropa dan opsi Amerika adalah acuan harga pada saat pemberlakuan opsi. Harga saham yang digunakan sebagai acuan dalam opsi Asia adalah rata-rata harga saham sepanjang waktu T.

Seydel (2002) menyatakan bahwa ada beberapa cara bagaimana rata-rata nilai dari S_t dapat dibentuk. Jika harga S_t diamati pada waktu diskrit contoh t_i, mengatakan *equidistantly* dengan interval waktu $h = T/n$, diperoleh $St_1, St_2, \ldots, St_n$, sehingga rata-rata aritmetikanya (*mean aritmatic*),

$$\bar{S}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}S_{ti}=\frac{1}{T}h\sum_{i=1}^{n}S_{ti}$$

Brewer, dkk (2012) menyatakan bahwa model harga saham pada waktu t didefinisikan sebagai berikut:

$$S(t)=S_0 e^{\left[\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right]t+\sigma\xi\sqrt{t}}$$

Hull (2002) menyatakan bahwa untuk proses perubahan harga saham diberikan sebagai berikut:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 S}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0$$

2. Metode Peneltian

Dalam kajian ini penulis menggunakan metode penelitian *library research*. Adapun langkah-langkahnya sebagai berikut:

1. Mengkaji perhitungan harga opsi Asia dengan menggunakan metode beda hingga implisit, eksplisit, dan Crank-Nicholson.
2. Membuat simulasi komputasi metode beda hingga implisit, eksplisit, dan Crank-Nicholson dengan mengambil suatu kasus tertentu. Dalam penelitian ini variabel yang diambil adalah harga saham untuk menentukan harga opsi saham. Adapun langkah-langkah yang dilakukan untuk mengkaji metode beda hingga implisit, eksplisit, dan Crank-Nicholson dengan simulasi program Matlab R2010a sebagai berikut:
   a. Menentukan parameter rata-rata dan standar deviasi dari suatu harga saham tertentu.
   b. Menbangkitkan harga saham pada masa tertentu.
   c. Menentukan harga opsi *call* dan *put* Asia pada langkah *b*, dengan model harga opsi Asia.
   d. Mengulangi langkah *b* dan *c* sebanyak *N* (misalkan *N* berulang untuk 8, 16, 32, 64, 128, dan 256).
   e. Menentukan interval nilai opsi.
3. Menganalisis hasil komputasi dari ketiga metode tersebut.

3. Pembahasan

3.1 Skema Beda Hingga Implisit

Untuk menentukan harga opsi dengan menggunakan metode beda hingga implisit yaitu dengan mendiskritisasi persamaan Black Scholes menggunakan persamaan:

$$V_{i+1,j}=a_j V_{i,j-1}+b_j V_{i,j}+c_j V_{i,j+1}$$

dengan,

$$a_j=\frac{rj\Delta t}{2}-\frac{\sigma^2 j^2\Delta t}{2},\quad b_j=1+\sigma^2 j^2\Delta t+r\Delta t,\quad c_j=-\frac{rj\Delta t}{2}-\frac{\sigma^2 j^2\Delta t}{2}$$

untuk i = N-1,...,1,0 dan j = 1,2,..,M-1.

Persamaan yang dihasilkan oleh metode beda hingga implisit dapat dibentuk suatu sistem persamaan linier dalam bentuk matriks, yaitu $V_{i,j} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T V_{i+1,j}$ dengan A adalah matriks tridiagonal.

3.2 Skema Beda Hingga Eksplisit

Untuk mendiskritisasi persamaan Black-Scholes dengan metode beda hingga eksplisi, yaitu menggunakan persamaan

$$V_{i,j} = \frac{1}{1 + r\Delta t}\left(a_j V_{i+1,j-1} + b_j V_{i+1,j} + c_j V_{i+1,j+1}\right)$$

dengan,

$$a_j = \frac{\sigma^2 j^2 \Delta t}{2} - \frac{r\, j\, \Delta t}{2},\quad b_j = 1 - \sigma^2 j^2\, \Delta t,\quad c_j = \frac{\sigma^2 j^2 \Delta t}{2} + \frac{r\, j\, \Delta t}{2}$$

untuk i = N-1 , ..., 1, 0 dan j = 1, 2, ..., M-1.

Persamaan yang dihasilkan oleh metode beda hingga eksplisit dapat dibentuk suatu sistem persamaan linier yang dapat dinyatakan dalam bentuk matriks, yaitu $V_{i,j} = BV_{i+1,j}$, dengan B adalah matriks tridiagonal.

3.3 Skema Beda Hingga Crank-Nicholson

Metode beda hingga Crank-Nicholson adalah rata-rata dari metode beda hingga implisit dan eksplisit. Sehingga persamaan yang digunakan untuk metode beda hingga Crank-Nicholson, yaitu

$$a_j V_{i,j-1} + b_j V_{i,j} + c_j V_{i,j+1} = \overline{a}_j V_{i+1,j-1} + \overline{b}_j V_{i+1,j} + \overline{c}_j V_{i+1,j+1}$$

dengan,

$$a_j = -\frac{\sigma^2 j^2 \Delta t}{4} + \frac{rj\Delta t}{4},\quad \overline{a}_j = \frac{\sigma^2 j^2 \Delta t}{4} - \frac{rj\Delta t}{4}$$

$$b_j = 1 + \frac{r\Delta t}{2} + \frac{\sigma^2 j^2 \Delta t}{2},\quad \overline{b}_j = 1 - \frac{r\Delta t}{2} - \frac{\sigma^2 j^2 \Delta t}{2}$$

$$c_j = -\frac{\sigma^2 j^2 \Delta t}{4} - \frac{rj\Delta t}{4},\quad \overline{c}_j = \frac{\sigma^2 j^2 \Delta t}{4} + \frac{rj\Delta t}{4}$$

untuk i = 0, 1, ..., N-1 dan j = 1, 2, ..., M-1.

Persamaan yang dihasilkan oleh metode beda hingga implisit dapat dibentuk suatu sistem persamaan linier dalam bentuk matriks, yaitu,

$$v_j^i = \left(A^T A\right)^{-1} A^T B v_j^{i+1}$$

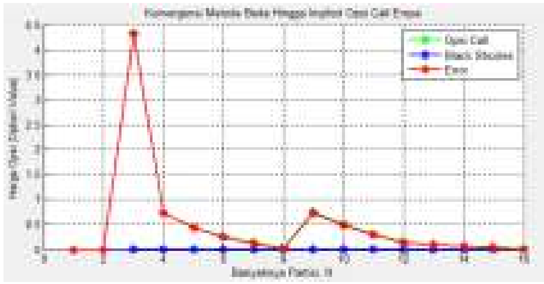
dengan A dan B adalah matriks tridiagonal.

3.4 Simulasi Perhitungan Harga Opsi Eropa

Sebelum ketiga metode tersebut digunakan untuk menentukan perhitungan harga opsi Asia, terlebih dahulu diimplementasikan pada penentuan harga opsi Eropa. Karena pada opsi Eropa terdapat solusi analitik sedangkan pada opsi Asia tidak ada solusi analitiknya. Jika ketiga metode tersebut hasil perhitungan harga opsi sesuai dengan solusi analitiknya, maka ketiga metode tersebut bisa digunakan pada opsi Asia.

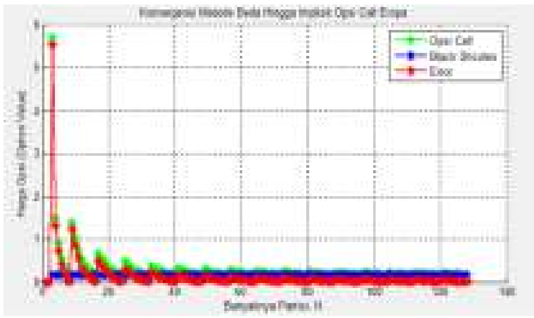
Sebagai ilustrasi, misalkan suatu kontrak opsi diberikan harga saham awal, S_0 = 5 (satuan mata uang) perlembar, harga saham ketentuan, K = 10 (satuan mata uang) perlembar, waktu jatuh tempo, T = 1 tahun, tingkat suku bunga bebas resiko, r = 6% pertahun dan standar deviasi saham tersebut sebesar , σ = 0,5.

Selanjutnya akan ditampilkan grafik solusi numerik untuk opsi Eropa dengan menggunakan metode beda hingga implisit, eksplisit, dan Crank-Nicholson sebagaimana yang terlihat pada gambar 1, gambar 2, gambar 3, dan gambar 4.



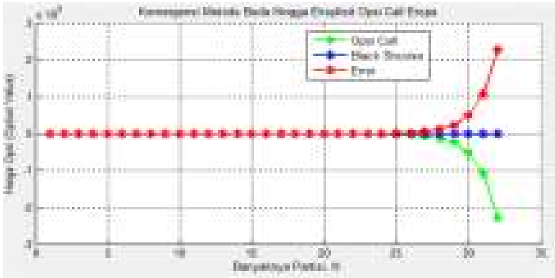
Gambar 1. Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Implisit Opsi *call* Eropa dengan N = 16

Pada gambar 1 menunjukkan bahwa pergerakan harga opsi *call* Eropa dengan menggunakan metode beda hingga implisit dengan partisi, N = 16. Hal ini menunjukkan bahwa galat yang dihasilkan terlalu besar. Sehingga untuk memperkecil galat, maka partisi N harus diperbanyak, sebagaimana yang terlihat pada gambar berikut.



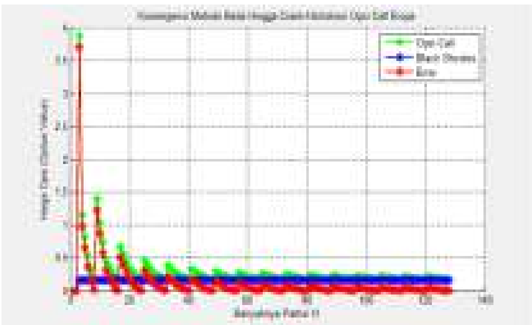
Gambar 2. Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Implisit Opsi *Call* Eropa dengan N = 128

Pada gambar 2 pergerakan harga opsi *call* dengan menggunakan metode beda hingga implisit dengan partisi N = 128. Semakin partisi N diperbanyak, maka pergerakan harga opsi tersebut akan mendekati solusi analitiknya. Ini berlaku juga untuk harga opsi *put*. Sehingga metode beda hingga implisit ini dapat digunakan untuk menentukan harga opsi Asia. Berikut gambar grafik dengan menggunakan metode beda hingga eksplisit.



Gambar 3. Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Eksplisit Opsi *Call* Eropa dengan N = 128

Pada gambar 3 ini menunjukkan pergerakan harga opsi *call* Eropa dengan menggunakan beda hingga eksplisit. Nampak jelas bahwa pergerakan harga opsi tersebut dengan partisi N = 128 akan menjauhi solusi analitiknya. Sehingga metode beda hingga eksplisit tidak dapat digunakan untuk menentukan harga opsi. Pada kasus ini harga saham yang digunakan adalah harga saham (S). Ketika menentukan harga opsi dengan menggunakan metode beda hingga lebih efektif menggunakan harga opsi yang di-*log*-kan agar harga opsi tersebut menjadi *lognormal*. Dengan demikian dalam kasus ini metode beda hingga eksplisit tidak dapat digunakan untuk menentukan harga opsi Asia. Kemudian akan ditunjukkan gambar grafik dengan menggunakan metode beda hingga Crank-Nicholson.



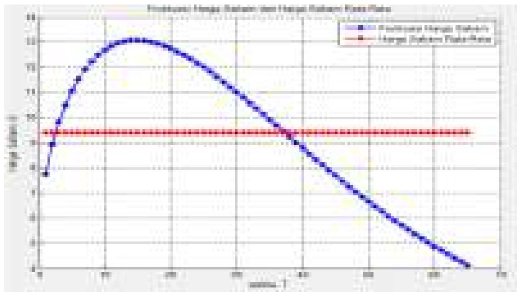
Gambar 4. Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Crank-Nicholson Opsi *Call* Eropa dengan N = 128

Pada gambar 4 menunjukkan bahwa perhitungan harga opsi *call* Eropa dengan menggunakan metode beda hingga Crank-Nicholson dengan partisi N = 128 akan mendekati perhitungan harga opsi *call* Eropa model persamaan Black-Scholes. Metode ini juga berlaku untuk perhitungan harga opsi *put*. Sehingga metode beda hingga Crank-Nicholson dapat digunakan harga opsi Asia.

3.5 Simulasi Perhitungan Harga Opsi Asia

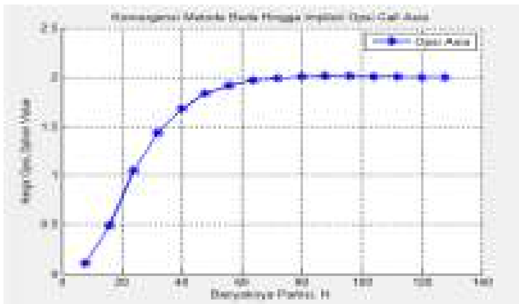
Dari ketiga simulasi metode tersebut yang dapat digunakan untuk menentukan harga opsi Eropa dalam kasus ini adalah metode beda hingga implisit dan Crank-Nicholson. Sehingga kedua metode inilah yang dapat menentukan harga opsi Asia dalam kasus ini.

Selanjutnya akan ditampilkan grafik simulasi harga saham dan solusi numerik untuk opsi Asia dengan menggunakan metode beda hingga implisit dan Crank-Nicholson sebagaimana yang terlihat pada gambar 5, gambar 6, dan gambar 7.



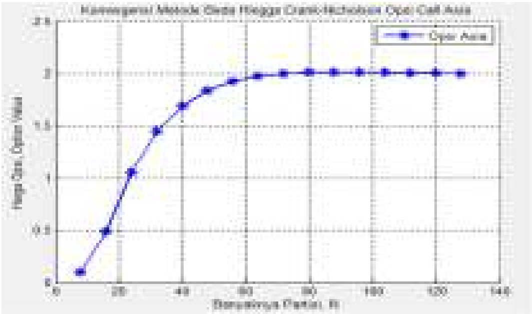
Gambar 5. Simulasi Harga Saham

Grafik pada gambar 5 menunjukkan bahwa pergerakan fluktuasi harga saham yang berbeda-beda pada setiap partisinya dengan partisi N = 64. Rata-rata harga saham yang dihasilkan sebesar 9.3718 (satuan mata uang). Setelah melakukan simulasi harga saham, akan ditampilkan gambar grafik dengan menggunakan metode beda hingga implisit sebagai berikut.



Gambar 6. Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Implisit Opsi *Call* Asia dengan N = 128

Grafik pada gambar 6 menunjukkan bahwa pergerakan harga opsi *call* Asia menggunakan metode beda hingga implisit dengan partisi waktu N = 128. Karena pada harga opsi Asia tidak memiliki solusi analitik, maka perhitungan harga opsi Asia jika partisi waktu, N, diperbanyak akan konvergen ke suatu titik dalam kasus ini yaitu 1.9963 (satuan mata uang). Metode beda hingga implisit ini juga dapat digunakan untuk menentukan harga opsi *put* Asia. Kemudian akan ditampilkan gambar grafik dengan menggunakan metode beda hingga Crank-Nicholson sebagai berikut.



Gambar 7.Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Crank-Nicholson Opsi *Call* Asia dengan N = 128

Grafik pada gambar 7 menunjukkan pergerakan harga opsi *call* Asia menggunakan metode beda hingga Crank-Nicholson dengan partisi waktu N = 128. Untuk mengetahui kebenaran suatu harga opsi Asia dapat dilihat dari kekonvergenan pergerakan harga opsi Asia itu sendiri. Semakin partisi waktu, N, diperbanyak maka harga opsi call Asia akan konvergen ke suatu titik dalam kasus ini yaitu 1,9988 (satuan mata uang). Metode beda hingga Crank-Nicholson ini juga dapat digunakan untuk menentukan harga opsi *put* Asia. Pada gambar 6 dan gambar 7 jika dilihat sekilas akan terlihat sama. Tapi kenyataannya kedua gambar tersebut berbeda. Letak perbedaannya terdapat pada titik kekonvergenannya yaitu jika pada gambar 6 titik kekonvergenannya yaitu 1.9963 (satuan mata uang), sedangkan pada gambar 7 titik kekonvergenannya adalah 1.9988 (satuan mata uang).

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan, maka dapat diambil kesimpulan bahwa dari kedua metode beda hingga implisit dan Crank-Nicholson yang lebih efektif untuk perhitungan harga opsi Asia adalah metode beda hingga Crank-Nicholson. Karena metode ini memberikan hasil yang maksimal dibanding dengan metode beda hingga implisit.

Daftar pustaka

Brewer, K.D., Feng, Y., dan Kwan, C.C.Y.. 2012. Geometric Brownian Motion, Option Pricing, and Simulation: Some Spreadsheet-Based Exercises in Financial Modeling: Spreadsheets in Education (eJSiE), **5**,1-13.

Halim, A.. 2003. Analisis Investasi. Jakarta: Salemba Empat.

Hull, J.C.. 2002. Option Future and Other Derivative. Toronto: Prentice Hall International Inc.

Kwok, Y.. 1998. Mathematical Models of Financial Derivatives. Hongkong: Springer.

Munir, R.. 2010. Metode Numerik. Bandung: Informatika Bandung.

Muniroh, W.S.. 2008. Simulasi Monte Carlo dalam Menentukan Nilai Opsi Saham. Skripsi tidak diterbitkan, Malang: UIN Malang.

Niwiga, D.B.. 2005. Numerical Methods for The Valuation Of Financial Derivatives. Tesis tidak diterbitkan, South Africa: University of Werstern Cape.

Seydel, R.. 2002. Tools for Computational Finance. Jerman: Springer.

Suritno. 2008. Metode Beda Hingga Untuk Solusi Numerik dari Persamaan Black-Scholes Harga Opsi Put Amerika. Tesis tidak diterbitkan, Bogor: IPB.

Wiklund, E.. 2012. Asian Option Pricing and Volatility. Tesis tidak diterbitkan. Stockholm: Institute of Technology