BAB 2
KAJIAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dibahas mengenai ketaksamaan dalam bilangan real, pengertian dari ruang metrik, barisan dalam ruang metrik beserta contoh-contohnya.

2.1. Ketaksamaan dalam Bilangan Real

Beberapa ketaksamaan pada bilangan real sebagai berikut

Teorema 2.1.1. Ketaksamaan Rerata Aritmatik Geometri (RAG) (Hernadi, 2015:20)**:**
Bila a dan b bilangan positif maka berlaku

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b).$$

Bukti:
Bila $a = b$ maka relasi pada (RAG) menjadi kesamaan. Sekarang diasumsikan $a \neq b$.
Karena $a > 0$ dan $b > 0$ maka $\sqrt{a} > 0$ dan $\sqrt{b} > 0$. Perhatikan bahwa

$$0 \neq a - b = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\underbrace{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)}_{>0}.$$

Jadi $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) \neq 0$, dan selanjutnya dikuadratkan diperoleh

$$0 < \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = a - 2\sqrt{ab} + b \;\leftrightarrow\; \sqrt{ab} < \frac{1}{2}(a+b).$$

Suku terakhir penjabaran ini memberikan ekspresi ketaksamaan RAG. ■

Setelah dibahas mengenai ketaksamaan RAG yang berlaku bahwa akar dari ab akan kurang dari setengah nya dari $a + b$ untuk a dan b bilangan positif. Selanjutnya akan dibahas mengenai ketaksamaan segitiga sebagai berikut:

Teorema 2.1.2. Ketaksamaan Segitiga (Hernadi, 2015:27)**:**
Untuk sebarang bilangan real a dan b berlaku

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Bukti:
Dari sifat nilai mutlak yaitu $-|a| \leq a \leq |a|$ dan $-|b| \leq b \leq |b|$. Dengan menjumlahkan kedua ketaksamaan tersebut diperoleh

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq (|a| + |b|).$$

Kemudian, dengan menggunakan sifat nilai mutlak yaitu untuk $c \geq 0, |a| < -c$ jika dan hanya jika $-c \leq a \leq c$ dengan menganggap $c := (|a| + |b|)$ maka terbukti bahwa

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$ ■

Berikut versi lainnya dari ketaksamaan segitiga diberikan pada teorema berikut ini.

Teorema 2.1.3. (Hernadi, 2015:27)**:**
Untuk sebarang bilangan real a dan b, berlaku

1. $\big||a| - |b|\big| \leq |a + b|$,
2. $|a - b| \leq |a| + |b|$.

Bukti:
Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga pada teorema 2.1.2 sebagai berikut:

1. Dengan menulis $a = (a - b) + b$. Menggunakan teorema 2.1.2 maka berlaku $|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$. Dengan ide yang sama, yaitu menulis $b = (b - a) + a$ diperoleh $|b| \leq |a - b| + |a|$. Mengingat bahwa $|a - b| = |-(b - a)| = |b - a|$. Dari kedua hasil ini diperoleh $|a| - |b| \leq |a - b|$ dan $|a| - |b| \geq -|a - b|$. Dengan menggunakan sifat nilai mutlak maka kedua hasil terakhir ini dapat ditulis sebagai $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$.
2. Dengan menulis $a - b = a + (-b)$ dan menggunakan teorema 2.1.2 diperoleh $|a - b| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|$. ■

2.2. Barisan Bilangan Real

Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai teorema dan definisi yang terdapat dalam barisan bilangan real.

Definisi 2.2.1. Barisan Bilangan Real (Hernadi, 2015:98):
Barisan bilangan real adalah suatu fungsi bernilai real dengan domain himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$.

Pada tulisan ini barisan dinotasikan sebagai (x_n) dengan $n \in \mathbb{N}$. Suku-suku pada barisan dapat menuju ke suatu bilangan tertentu maupun tidak menuju ke suatu bilangan tertentu. Pada kasus tersebut ketika sukunya menuju pada bilangan tertentu yang berhingga disebut konvergen sedangkan ketika sukunya tidak menuju ke suatu bilangan tertentu disebut divergen. Selanjutnya akan dijelaskan mengenai limit barisan bilangan real sebagai berikut:

Definisi 2.2.2. Limit Barisan Bilangan Real (Hernadi, 2015:100)
Misalkan(x_n) barisan bilangan real. Bilangan real x dikatakan limit dari (x_n) jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $\mathbb{N}$ sehingga berlaku

$$|x_n - x| < \varepsilon, \text{ untuk setiap } n \geq \mathbb{N}.$$

Jika x limit dari barisan (x_n) maka (x_n) dikatakan konvergen ke x dan dapat ditulis $\lim(x_n) = x$. Suatu barisan konvergen hanya ke satu limit saja hal tersebut dijelaskan di teorema berikut ini:

Teorema 2.2.1. (Hernadi, 2015:102)
Suatu barisan bilangan real hanya dapat mempunyai satu limit. Dapat dikatakan bahwa jika suatu barisan konvergen maka limitnya tunggal.

Bukti:
Andaikan barisan $X \coloneqq (x_n)$ mempunyai dua limit yang berbeda, misalkan x_a dan x_b dengan $x_a \neq x_b$. Diberikan $\varepsilon \coloneqq \frac{1}{3}|x_b - x_a| > 0$. Karena $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = x_a$ maka untuk ε, terdapat N_a sehingga

$$|x_n - x_a| < \varepsilon, \text{ untuk setiap } n \geq N_a.$$

Juga, karena $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = x_b$ maka terdapat N_b sehingga

$$|x_n - x_b| < \varepsilon, \text{ untuk setiap } n \geq N_b.$$

Sehingga untuk $n \geq \max\{N_a, N_b\}$ maka berlaku

$$|x_a - x_b| = |x_a - x_n + x_n - x_b|$$

$$\le |x_a - x_n| + |x_n - x_b|$$
$$< \varepsilon + \varepsilon$$
$$= \frac{2}{3}|x_a - x_b|.$$

Akhirnya diperoleh $|x_a - x_b| < \frac{2}{3}|x_a - x_b|$ merupakan pernyataan yang kontradiksi. Jadi pengandaian $x_a \neq x_b$ salah dan haruslah $x_a = x_b$, yaitu limitnya tunggal. ■

Setelah dibahas bahwa barisan yang konvergen itu limitnya tunggal selanjutnya, pada teorema berikut ini dijelaskan kekonvergenan suatu barisan yang terjepit oleh dua barisan yang konvergen ke limit yang sama.

Teorema 2.2.2. Teorema Kekonvergenan Terjepit (Hernadi, 2015:112):
Bila (x_n), (y_n), dan (z_n) barisan bilangan real yang memenuhi kondisi berikut.

1. $x_n \le y_n \le z_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
2. $\lim(x_n) = \lim(z_n)$.

Maka (y_n) konvergen dan $\lim(x_n) = \lim(y_n) = \lim(z_n)$.

Bukti:
Misalkan $w \coloneqq \lim(x_n) = \lim(z_n)$. Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang, maka terdapat bilangan asli N_1 dan N_2 sehingga

$$|x_n - w| < \varepsilon \text{ untuk setiap } n \ge N_1 \text{ dan } |z_n - w| < \varepsilon \text{ untuk setiap } n \ge N_2$$

Bisa diambil $N \coloneqq \max\{N_1, N_2\}$ maka berlaku

$$-\varepsilon < x_n - w \text{ dan } z_n - w < \varepsilon \text{ untuk setiap } n \ge N$$

Oleh karena diketahui $x_n \le y_n \le z_n$, maka dengan menambahkan w pada ketiga ruas diperoleh

$$x_n - w \le y_n - w \le z_n - w \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N}$$

Dengan hasil sebelumnya diperoleh

$$-\varepsilon < y_n - w < \varepsilon \text{ jika dan hanya jika } |y_n - w| < \varepsilon \text{ untuk setiap } n \ge N$$

Jadi terbukti bahwa $\lim(y_n) = w$ sehingga $\lim(x_n) = \lim(y_n) = \lim(z_n)$. ■

Selanjutnya akan dibahas mengenai barisan Cauchy pada bilangan real
Definisi 2.2.3. Barisan Cauchy pada Bilangan Real (Hernadi, 2015:124)
Barisan x_n disebut barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli K, biasanya bergantung pada ε sehingga

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \text{ untuk setiap } m, n \ge K.$$

Teorema 2.2.3. (Hernadi, 2015:124)
Bila (x_n) barisan Cauchy maka (x_n) terbatas
Bukti:
Misalkan $X \coloneqq (x_n)$ barisan Cauchy, dan diberikan $\varepsilon \coloneqq 1$. Terdapat bilagan asli K sehingga

$$|x_n - x_m| < 1 \text{ untuk setiap } m, n \ge K.$$

Khususnya, untuk $m = K$ maka berlaku

$$|x_n - x_K| < 1, \text{ akibatnya } |x_n| < 1 + |x_K| \text{ untuk setiap } n \ge K.$$

Diambil $M \coloneqq \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{K-1}|, 1 + |x_K|\}$ maka diperoleh $|x_n| < M$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ yaitu (x_n) terbatas. ■

Teorema 2.2.4. (Hernadi, 2015:125)
Suatu barisan bilangan real adalah konvergen jika dan hanya jika ia barisan Cauchy.
Bukti:
($\rightarrow$) Diketahui (x_n) konvergen, misalkan $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x$. Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang, maka ada bilangan asli K sehingga $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $n \geq K$. Jadi untuk setiap $m, n \geq K$ berlaku

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |(x_n - x) + (x - x_m)| \\ &\leq |x_n - x| + |x - x_m| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Jadi $|x_n - x_m| < \varepsilon$, sehingga terbukti bahwa (x_n) barisan Cauchy.
($\leftarrow$) Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang. Oleh karena (x_n) adalah barisan Cauchy maka ada bilangan asli K_1 sehingga

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ untuk setiap } m, n \geq K_1.$$

Karena (x_n) barisan Cauchy maka (x_n) terbatas sehingga berdasarkan teorema Bolzano-Weierstrass terdapat barisan bagian (x_{r_n}) yang konvergen, misalkan $\lim_{n\to\infty}(x_{r_n}) = x^*$.
Oleh karena itu terdapat bilangan asli K_2 sehingga

$$|x_{r_n} - x^*| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ untuk setiap } r_n \geq K_2.$$

Ambil $K \coloneqq \max\{K_1, K_2\}$ maka keduanya berlaku

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ dan } |x_{r_n} - x^*| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ untuk setiap } m, n, r_n \geq K.$$

Khususnya untuk $m = K = r_n$ berlaku

$$|x_n - x_K| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ dan } |x_K - x^*| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ untuk setiap } n \geq K.$$

Diperoleh untuk setiap $n \geq K$ berlaku

$$\begin{aligned} |x_n - x^*| &= |x_n - x_K + x_K - x^*| \\ &\leq |x_n - x_K| + |x_K - x^*| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Sehingga $|x_n - x^*| < \varepsilon$, maka barisan (x_n) konvergen ke x^*. ■

Sebelumnya telah dibahas mengenai barisan pada bilangan real dan juga suatu barisan yang konvergen pada bilangan real maka barisan tersebut mempunyai limit. Apabila barisan tersebut tidak mempunyai limit maka ia disebut divergen. Sehingga bahasan selanjutnya mengembangkan konsep limit yaitu limit superior dan limit inferior. Berikut definisi dari limit superior dan limit inferior:

Definisi 2,2.4. Limit Superior dan Limit Inferior (Hernadi, 2015:131)
Misal $\mathbb{R}^*$ bilangan real diperluas, (x_n) barisan bilangan real dan E adalah himpunan bilangan $x \in \mathbb{R}^*$ sehingga ada barisan bagian $\left(x_{n_k}\right)$ dengan $x_{n_k} \to x$. Didefinisikan bilangan x^* dan x_* sebagai berikut:

$$x^* := \sup E \text{ dan } x_* \coloneqq \inf E$$

maka x^* disebut limit superior dan x_* disebut limit inferior dari (x_n) dan ditulis sebagai

$$x^* = \lim\sup(x_n) \text{ dan } x_* = \lim\inf(x_n).$$

Definisi 2.2.5. (Hernadi, 2015:131)
Misal (x_n) barisan bilangan real. Limit superior dan limit inferior barisan (x_n) adalah

$$\lim\sup(x_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup\{x_k : k \geq n\} \text{ dan } \lim\inf(x_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf\{x_k : k \geq n\}.$$

Berikut akan dibahas mengenai hubungan antara limit superior dengan limit inferior.

Teorema 2.2.5. Hubungan antara Limit Inferior dengan Limit Superior (Hernadi, 2015:133)
Misalkan (x_n) barisan terbatas. Limit inferiornya tidak akan pernah melebihi limit superiornya, yaitu

$$\lim\inf(x_n) \leq \lim\sup(x_n).$$

Bukti:
Menggunakan definisi melalui pendekatan ekor barisan. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ selalu berlaku $\inf\{x_k : k \geq n\} \leq \sup\{x_k : k \geq n\}$. Ruas kiri diambil supremum dan ruas kanan diambil infimum, diperoleh

$$\lim\inf(x_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \{x_k : k \geq n\} \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup\{x_k : k \geq n\} = \lim\sup(x_n).$$

Terbukti bahwa $\lim\inf(x_n) \leq \lim\sup(x_n)$. ■

2.3. Sifat Archimedes

Pada bagian ini akan dibahas mengenai sifat Archimedes.

Teorema 2.3.1. Sifat Archimedes (Hernadi, 2015:43)
Himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ tidak mempunyai batas atas

Bukti:
Dengan menggunakan kontradiksi. Diandaikan $\mathbb{N}$ tidak mempunyai batas atas maka $\mathbb{N}$ mempunyai supremum sebuah bilangan real, katakan $u = \sup \mathbb{N}$. Bila digeser ke kiri sebesar 1, maka $u - 1$ bukan lagi batas atas $\mathbb{N}$. Jadi, ada $m \in \mathbb{N}$ sehingga $u - 1 < m$. Selanjutnya diambil $t \coloneqq m + 1$ maka $t \in \mathbb{N}$ dan $t > \sup \mathbb{N} = u$. Terjadi kontradiksi dengan $u = \sup \mathbb{N}$. ■

Sifat Archimedes merupakan himpunan bilangan asli yang tidak memiliki batas atas, sehingga hal tersebut bisa berakibat seperti dibawah ini.

1. Tidak masalah seberapa besar bilangan real x yang diberikan, selalu dapat ditemukan bilangan asli n sehingga $n > x$.

2. Sebesar apapun bilangan real positif y yang diberikan dan seberapa kecil bilangan real positif x yang diberikan maka selalu digandakan x dengan sebuah bilangan asli sehingga hasilnya melebihi y, yakni selalu ada $n \in \mathbb{N}$ sehingga $nx > y$.
3. Diberikan bilangan positif sebarang $\varepsilon > 0$, tidak masalah seberapa pun kecilnya, maka selalu ada bilangan asli n_0 sehingga $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

2.4. Ruang metrik

Pada bagian ini akan dibahas mengenai konsep jarak biasa yang dikenal dengan ruang metrik, dan barisan pada ruang metrik.

Definisi 2.4.1. Ruang Metrik (Shirali,2006:27)**:**

Himpunan tak kosong X dengan pemetaan $d: X \times X \to \mathbb{R}$ dikatakan ruang metrik jika pemetaan d memenuhi sifat:

(MS1) $d(x,y) \geq 0$, $x, y \in X$

(MS2) $d(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$

(MS3) $d(x,y) = d(y,x),\ x, y \in X$

(MS4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y),\ x, y, z \in X$

Selanjutnya berikut diberikan contoh mengenai ruang metrik.

Contoh 2.4.1 (Hernadi, 2015:31)**:**

Buktikan $d(x,y) \coloneqq |x - y|$ merupakan metrik pada $\mathbb{R}$.

Bukti:

Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}$ berlaku

1. $d(x,y) \coloneqq |x - y| \geq 0.$
2. $d(x,y) \coloneqq |x - y| = 0 \leftrightarrow x - y = 0 \leftrightarrow x = y.$
3. $d(x,y) \coloneqq |x - y| = |y - x| =: d(y,x).$
4. $d(x,y) \coloneqq |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y| =: d(x,z) + d(z,y)$

Jadi d merupakan metrik sehingga $(\mathbb{R}, d)$ merupakan ruang metrik ■

Setelah diketahui mengenai ruang metrik selanjutnya diberikan beberapa definisi barisan pada ruang metrik, barisan yang konvergen, Cauchy dan juga ruang metrik lengkap.

Definisi 2.4.2. Barisan pada Ruang Metrik (Shirali,2006:38)**:**

Diberikan (X, d) sebagai ruang metrik. Barisan di X adalah suatu fungsi f yang memetakan $\mathbb{N}$ ke X.

Pada penelitian ini untuk pembahasan selanjutnya akan digunakan notasi barisan pada ruang metrik yaitu (x_n) untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Selanjutnya akan dijelaskan mengenai barisan yang konvergen, Cauchy dan juga hubungan dari barisan konvergen, Cauchy yang menjadi ruang metrik lengkap. Berikut diberikan terlebih dahulu definisi dari kekonvergenan suatu barisan.

Definisi 2.4.3. Kekonvergenan Barisan pada Ruang Metrik (Shirali,2006:38)**:**

Diberikan d metrik dari himpunan X dan (x_n) barisan pada himpunan X. $x \in X$ dikatakan limit dari barisan (x_n) jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli n_0 sehingga

$$d(x_n, x) < \varepsilon \text{ untuk setiap } n \geq n_0$$

Pada kasus ini, dapat dikatakan bahwa barisan (x_n) konvergen ke x, dan dapat dituliskan sebagai $x_n \to x$.

Contoh 2.4.2. (Sihombing, 2018:17)
Diberikan $X = [0,1]$ dan $d(x,y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$. Maka barisan (x_n) yang didefinisikan oleh $x_n = \frac{1}{n}$, untuk $n \in \mathbb{N}$ di dalam ruang metrik (X, d). Buktikan (x_n) konvergen ke 0.
Bukti:
Diambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Oleh karena itu, jika $n \geq n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ maka $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Sehingga untuk setiap $n \geq n_0$, berlaku

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Jadi, $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$, hal ini menunjukkan bahwa barisan (x_n) konvergen di X. ■

Definisi 2.4.4. Barisan Cauchy pada Ruang Metrik (Shirali, 2006:45)**:**
Diberikan d suatu metrik pada himpunan X. Barisan $(x_n)_{n\geq 1}$ pada himpunan X dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli n_0 sehingga

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \text{ untuk setiap } n \geq n_0 \text{ dan } m \geq n_0$$

Contoh 2.4.3 (Kreyszig, 1978:29)**:**
Diberikan $X = (0,1]$ dengan $d(x,y) = |x - y|$ dan barisan $(x_n) = \frac{1}{n}$, dimana $n \in \mathbb{N}$ pada ruang metrik (X, d). Buktikan barisan (x_n) merupakan barisan Cauchy tetapi tidak konvergen di X.
Bukti:
Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$. Oleh sebab itu, jika $n, m \geq n_0$ maka $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$ dan $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0}$. Sehingga jika $n, m \geq n_0$ maka

$$d(x_m, x_n) = |x_m - x_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{2}{n_0} < \varepsilon$$

Jadi barisan (x_n) adalah barisan Cauchy pada ruang metrik (X, d). Karena (x_n) konvergen ke 0 akan tetapi 0 bukan anggota dari X sehingga barisan (x_n) di dalam $X = (0,1]$ bukan merupakan barisan yang konvergen di X. ■

Dari barisan konvergen dan barisan Cauchy pada ruang metrik berikut diberikan hubungan dari kedua barisan tersebut sehingga dapat dikatakan ruang metrik lengkap.
Definisi 2.4.5. Ruang Metrik Lengkap (Shirali,2006:47)**:**
Ruang metrik (X, d) dikatakan lengkap jika setiap barisan cauchy di X adalah konvergen.
Contoh 2.4.4 (Shirali, 2006:52):
Diberikan X himpunan tak kosong dan d didefinisikan

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & untuk\ x = y \\ 1 & untuk\ x \neq y \end{cases}$$

Buktikan bahwa (X, d) adalah ruang metrik lengkap.
Bukti:
Jika $(x_n) \subseteq X, n \in \mathbb{N}$ adalah barisan Cauchy, maka untuk $0 < \varepsilon < 1$ terdapat bilangan bulat positif n_0 sehingga $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ untuk setiap $m, n \geq n_0(\varepsilon)$. Untuk $n \geq n_0(\varepsilon)$, maka $\left|x_n - x_{n_0(\varepsilon)}\right| < \varepsilon$. Jadi setiap barisan Cauchy pada (X, d) membentuk

$$\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}, x_{n_0}, \ldots\right),$$

dimana barisan tersebut konvergen ke limit x_{n_0}. Karena (X, d) merupakan barisan Cauchy dan juga konvergen sehingga (X, d) merupakan ruang metrik lengkap. ■