BAB II
KAJIAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dibahas mengenai konsep dasar dan notasi yang akan digunakan pada pembahasan berikutnya.

2.1 Ruang Metrik

Dalam geometri fraktal diperhatikan struktur bagian dari berbagai ruang geometris yang sangat sederhana. Ruang tersebut dinotasikan dengan $\boldsymbol{X}$. Ruang tersebut merupakan ruang tempat fraktal digambarkan. Fraktal itu sendiri hanyalah sebagian ruang. Karena ruangnya sederhana, maka subset fraktal mungkin rumit secara geometris.

Definisi 2.1.1 (Barnsley, 1988: 6)
Ruang $\boldsymbol{X}$ adalah sebuah himpunan. Titik-titik dalam ruang $\boldsymbol{X}$ adalah elemen dari himpunan tersebut.

Definisi 2.1.2 (Barnsley, 1988: 11)
Ruang metrik $(\boldsymbol{X}, d)$ adalah ruang $\boldsymbol{X}$ yang dilengkapi dengan fungsi $d: \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}$**,** yang mengukur jarak antara pasangan titik x dan y dalam $\boldsymbol{X}$. Sedemikian hingga d memenuhi aksioma-aksioma berikut:

i. $d(x, y) = d(y, x)\ \forall x, y \in \boldsymbol{X}$
ii. $0 < d(x, y) < \infty\ \forall x, y \in \boldsymbol{X}, x \neq y$
iii. $d(x, x) = 0\ \ \forall\ x \in \boldsymbol{X}$
iv. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)\ \forall\ x, y, z\ \in \boldsymbol{X}$

fungsi d disebut sebagai metrik.

Definisi 2.1.3 (Barnsley, 1988: 17)
Barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dari titik-titik pada ruang metrik $(\boldsymbol{X}, d)$ disebut barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan bulat $N > 0$ sedemikian sehingga,

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon, \forall\ n, m > N.$$

Definisi 2.1.4
Barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dari titik-titik pada ruang metrik $(\boldsymbol{X}, d)$ dikatakan konvergen ke sebuah titik $x \in \boldsymbol{X}$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan bulat $N > 0$ sedemikian sehingga,

$$d(x_n, x) < \varepsilon, \forall\ n > N.$$

Dalam kasus ini $x \in \boldsymbol{X}$, disebut limit barisan dan dinotasikan dengan $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Teorema 2.1.1 (Barnsley, 1988: 18)
Jika barisan titik $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dalam ruang metrik $(\boldsymbol{X}, d)$ konvergen ke sebuah titik $x \in \boldsymbol{X}$, maka $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan Cauchy.

Definisi 2.1.5. (Hernadi, 2015: 38)
Misalkan A suatu himpunan bagian dari $\mathbb{R}$.

1. Bilangan $u \in \mathbb{R}$ dikatakan batas atas A jika $a \leq u$ untuk setiap $a \in A$.

2. Bilangan $w \in \mathbb{R}$ dikatakan batas bawah A jika $w \leq a$ untuk setiap $a \in A$.

Contoh 2.1.1.
Tentukan batas bawah dan atas himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$.
Penyelesaian:
Karena $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ maka diperoleh himpunan batas bawah $\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 1\}$. Diperhatikan anggota $\mathbb{N}$ tidak mempunyai batas atas sehingga disimpulkan himpunan batas atas $\mathbb{N} = \emptyset$. ■

Definisi 2.1.6. (Hernadi, 2015: 39)
Misalkan A himpunan bagian dari $\mathbb{R}$.

1. Misalkan A terbatas di atas. Batas atas u dikatakan supremum A, ditulis
$$u = \sup(A)$$
jika tidak ada bilangan lain yang lebih kecil dari u yang menjadi batas atas A. Dengan kata lain u batas atas yang paling kecil.
2. Misalkan A terbatas di bawah. Batas bawah w dikatakan infimum dari A, ditulis
$$w = \inf(A)$$
jika tidak ada bilangan lain yang lebih besar dari w yang menjadi batas bawah A. Dengan kata lain w batas bawah yang paling besar.

Definisi 2.1.7. Limit Superior dan Limit Inferior (Shirali, 2006: 7)
Misalkan $\{x_n\}_{n\geq 1}$ adalah suatu barisan terbatas, didefinisikan limit superior sebagai berikut
$$\overline{\lim}\, x_n = \inf_n \sup_{k\geq n} x_k$$
dan didefinisikan limit inferior sebagai berikut
$$\underline{\lim}\, x_n = \sup_n inf_{k\geq n} x_k.$$

Definisi 2.1.8 (Hernadi, 2015: 210)
Misalkan $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Jika terdapat konstanta $c > 0$ sehingga berlaku
$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$$
untuk setiap $x, y \in A$ maka f disebut fungsi Lipschitz pada A.

Definisi 2.1.9
Ruang metrik $(\boldsymbol{X}, d)$ dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ di dalam $\boldsymbol{X}$ mempunyai limit $x \in \boldsymbol{X}$.

Definisi 2.1.10. (Barnsley, 1988: 19)
Misalkan S adalah himpunan bagian dari ruang metrik $(\boldsymbol{X}, d)$. Titik $x \in \boldsymbol{X}$ disebut titik batas dari S jika ada barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dari titik-titik $x_n \in S \backslash \{x\}$ sehingga $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Definisi 2.1.11. (Shirali, 2006: 72)

Misalkan S adalah himpunan bagian dari ruang metrik $(\boldsymbol{X}, d)$. Penutup himpunan (*closure*) S dinotasikan dengan $\bar{S}$ dan didefinisikan sebagai $\bar{S} = S \cup S'$. Dimana S' adalah himpunan titik-titik limit dari S.

Contoh 2.1.2.

Diketahui $\boldsymbol{X} = \mathbb{R}$ dan $(\boldsymbol{X}, d)$ adalah ruang metrik dengan $d(x, y) := |x - y|$ untuk setiap $x, y \in \boldsymbol{X}$. Diberikan $G = \{x \in \mathbb{R}: 1 < x \leq 5\} \subset \boldsymbol{X}$ diperoleh $1 \notin G$ dan $5 \in G$. Dimana $G' = [1,5]$ adalah titik limit sehingga limit G tidak tertutup. Bila himpunan G digabung dengan G' dimana G' adalah himpunan semua titik limit G yaitu, $[1,5]$ maka $\bar{G} = G \cup G'$ adalah penutup *(closure)*.

2.2 Titik dan Himpunan Khusus pada Ruang Metrik

Pembahasan selanjutnya yaitu mengenai titik dan himpunan khusus pada ruang metrik.

Definisi 2.2.1. Bola Terbuka & Tertutup (Shirali, 2006: 64)

Misalkan $(\boldsymbol{X}, d)$ adalah ruang metrik. Suatu himpunan

$$B(c, r) = \{x \in \boldsymbol{X}: d(c, x) < r\}$$

disebut bola terbuka dengan pusat c dan jari-jari r di $\boldsymbol{X}$. Dimana $c \in \boldsymbol{X}$ dan $r > 0$ untuk $r \in \mathbb{R}$. Dan

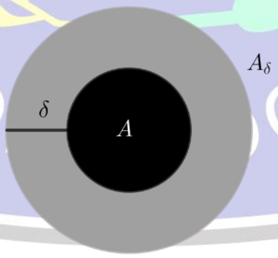
$$\bar{B}(c, r) = \{x \in \boldsymbol{X}: d(c, x) \leq r\}$$

disebut bola tertutup dengan pusat c dan jari-jari r di $\boldsymbol{X}$. Dimana $c \in \boldsymbol{X}$ dan $r > 0$ untuk $r \in \mathbb{R}$.

Definisi 2.2.2. Persekitaran Himpunan (Falconer, 2003: 4)

Persekitaran-δ dari himpunan A dilambangkan dengan A_δ dan didefinisikan sebagai himpunan titik-titik dalam jarak δ dari A, yaitu

$$A_\delta = \{x: d(x, y) \leq \delta, \text{untuk suatu } y \in A\}.$$



Gambar 1. Himpunan A dan persekitaran-δnya.

Definisi 2.2.3. (Falconer, 2003: 124)

Diberikan himpunan tertutup D dan $A, B \in D$. Jarak antara himpunan A dan B didefinisikan sebagai δ terkecil sedemikian sehingga pesekitaran-δ dari A memuat B dan juga sebaliknya,

$$d(A, B) = \inf\{\delta: A \subset B_\delta \text{ dan } B \subset A_\delta\}.$$

Definisi 2.2.4. Titik Interior (Shirali, 2006: 69)
Misalkan S adalah himpunan bagian dari ruang metrik $(\boldsymbol{X}, d)$. Suatu titik $x \in \boldsymbol{X}$ dikatakan titik interior dari S, jika terdapat bola terbuka dengan pusat x yang termuat dalam S, yaitu

$$x \in B(x, r) \subseteq S, \text{ untuk suatu } r>0,$$

atau dengan kata lain, jika x mempunyai persekitaran di dalam S.

Contoh 2.2.1
Diberikan $[0,1] \subset \mathbb{R}$. Titik-titik interior dari himpunan $[0,1]$ dapat dituliskan sebagai $(0,1)$. Misalkan $x \in (0,1)$. Karena $(0,1)$ terbuka, maka terdapat $r > 0$ sehingga $(x-r, x+r) \subset [0,1]$. Jadi, x adalah titik interior dari $[0,1]$. Sedangkan 0 bukan titik interior dari $[0,1]$, karena tidak ada $r > 0$ yang memenuhi $(-r, r) \subset [0,1]$. Sama halnya dengan 1, bukan titik interior dari $[0,1]$.

Definisi 2.2.5. Titik Batas (Shirali, 2006: 70)
Misalkan S himpunan bagian dari ruang metrik $(\boldsymbol{X}, d)$. Titik $x \in \boldsymbol{X}$ dikatakan titik batas dari S, jika untuk setiap bola terbuka dengan pusat x memuat setidaknya satu titik elemen S yang berbeda dari x, yaitu

$$(B(x,r) - \{x\}) \cap S \neq \emptyset.$$

Definisi 2.2.6. Himpunan Terbuka & Tertutup
Misalkan S himpunan bagian dari ruang metrik $(\boldsymbol{X}, d)$. Himpunan S dikatakan terbuka jika tidak memuat titik batasnya dan dikatakan tertutup jika memuat semua titik batasnya.

Definisi 2.2.7 (Hernadi, 2015: 79)
Misalkan S himpunan pada sebuah ruang metrik $\boldsymbol{X}$. Liput terbuka *(open cover)* adalah koleksi himpunan terbuka $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ pada $\boldsymbol{X}$ sehingga gabungannya menyelimuti E, yaitu

$$E \subseteq \bigcup_{\alpha} G_\alpha.$$

Bila $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$ dan gabungan himpunan-himpunan di dalamnya masih memuat E maka $\mathcal{G}'$ disebut liput bagian *(subcover)* dari $\mathcal{G}$. jika $\mathcal{G}'$ memuat berhingga banyak himpunan maka ia disebut liput bagian berhingga *(finite subcover).*

Definisi 2.2.8 (Himpunan Kompak)
Sebuah himpunan S pada ruang metrik $\boldsymbol{X}$ dikatakan kompak jika setiap liput terbuka S memuat liput bagian berhingga. Secara eksplisit jika $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ liput terbuka S maka terdapat berhingga banyak indeks $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sehingga

$$S \subset G_{\alpha_1} \cup G_{\alpha_2} \cup \dots \cup G_{\alpha_n}.$$

Contoh 2.2.2.
Buktikan himpunan berhingga $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ pada $\mathbb{R}$ adalah kompak.

Bukti: Misalkan $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ sebarang liput terbuka S. Maka untuk setiap x_i terdapat $G_{\alpha_i} \in \mathcal{G}$ sehingga $x_i \in G_{\alpha_i}$. Jadi berlaku $S \subset G_{\alpha_1} \cup G_{\alpha_2} \cup \dots \cup G_{\alpha_n}$. Oleh karena itu diambil $\mathcal{G}$ $:= \{G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \dots, G_{\alpha_n}$ sebagai liput bagiannya. ■

Definisi 2.2.9. Himpunan Terbatas (Barnsley, 1988: 20)
misalkan $S \subset \boldsymbol{X}$, subset dari ruang metrik $(\boldsymbol{X}, d)$. Himpunan S terbatas jika ada titik $a \in \boldsymbol{X}$ dan sebuah bilangan $R > 0$ sehingga

$$d(a, x) < R, \quad \forall x \in S.$$

Contoh 2.2.3 (Shirali, 2006: 76)
Diberikan ruang metrik $\boldsymbol{X} = \mathbb{R}$ dengan $d(x,y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. Sedemikian sehingga $P = [0, 3] \subseteq \mathbb{R}$ merupakan himpunan terbatas karena terdapat bilangan real positif, yaitu $R = 3$ sehingga $d(x,y) = |x - y| \leq 3$ untuk setiap $x, y \in [0, 3]$.

Definisi 2.2.10. (Barnsley, 1988: 20)
Misalkan $S \subset \boldsymbol{X}$, subset dari ruang metrik $(\boldsymbol{X}, d)$. S terbatas total jika $\forall \varepsilon > 0$, ada himpuanan berhingga dari titk-titik $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subset S$ sedemikian sehingga $\forall x \in S, d(x, y_i) < \varepsilon$, untuk suatu $y_i \in \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Himpunan dari titik-titik $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ ini disebut ϵ-net.

Teorema 2.2.1 (Barnsley, 1988: 21)
Misalkan $(\boldsymbol{X}, d)$ ruang metrik lengkap. Diberikan $S \subset \boldsymbol{X}$. S kompak jika dan hanya jika S tertutup dan terbatas total.

Definisi 2.2.11. Himpunan Terbilang (Hernadi, 2015: 73)
Himpunan S dikatakan terbilang (*countable*) jika terdapat korespondensi satu-satu (bijeksi) antara S dan himpunan bagian bilangan asli $\mathbb{N}$. Jika tidak dapat dibentuk korespondensi satu-satu seperti yang dimaksud maka himpunan tersebut dikatakan takterbilang (*uncountable*).

Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ merupakan contoh himpunan-himpunan terbilang, sedangkan bilangan real $\mathbb{R}$ merupakan himpunan bilangan takterbilang. Dan perlu diperhatikan bahwa gabungan berhingga dari himpunan-himpunan terbilang adalah terblang.

2.3 Ukuran dan distribusi massa

Dalam aplikasi sebagian besar fraktal dibutuhkan ide-ide dasar dari ukuran. Ukuran yang dibutuhkan dalam pembahasan ini adalah ukuran pada himpunan bagian dari $\mathbb{R}^n$.

Definisi 2.3.1. Himpunan Borel
Himpunan borel (*Borel set*) $\mathfrak{B}$ adalah aljabar-σ terkecil yang memuat semua himpunan terbuka.

Sebagai contoh himpunan borel adalah himpunan semua bilangan real, $\mathbb{R}$. Himpunan semua bilangan rasional $\mathbb{Q}$ juga merupakan himpunan borel, sebab $\mathbb{Q}$ terbilang sehingga setiap anggota $\mathbb{Q}$ dapat diberi indeks $n \in \mathbb{N}$, yaitu $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots\}$, dimana $\{r_i\} \in \mathfrak{B}$ sehingga $\mathbb{Q} = \cup_n \{r_i\} \in \mathfrak{B}$. Himpunan terbuka (a, b) juga anggota $\mathfrak{B}$.

Definisi 2.3.2 (Falconer, 2003: 11)
μ disebut ukuran pada $\mathbb{R}^n$ jika diberikan bilangan tak negatif, mungkin ∞ untuk setiap himpunan bagian $\mathbb{R}^n$, sehingga berlaku:

i. $\mu(\emptyset) = 0$
ii. $\mu(A) \leq \mu(B)$ jika $A \subset B$
iii. Jika $A_1, A_2, \dots$ adalah barisan terbilang dari himpunan-himpunan, maka

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

dan

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

jika A_i adalah himpunan Borel dengan sifat $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$.

$\mu(A)$ disebut ukuran dari himpunan A. Poin pertama dari definisi 2.3.2 mengatakan bahwa himpunan kosong mempunyai ukuran 0, poin kedua mengatakan bahwa himpunan yang lebih besar, memiliki ukran yang lebih besar pula, dan poin ketiga mengatakan bahwa ukuran dari gabungan himpunan terbilang kurang dari sama dengan jumlah ukuran keseluruhannya dan berlaku sama dengan apabila himpunan tersebut merupakan himpunan-himpunan borel terpisah.

Definisi 2.3.3 (Falconer, 2003: 12)
Misalkan $A \supset B$, sehingga A dapat dituliskan $A = B \cup (A \backslash B)$. Dengan demikian A dan B merupakan himpunan borel, sehingga dapat didefinisikan bahwa

$$\mu(A \backslash B) = \mu(A) - \mu(B).$$

Teorema 2.3.1
Jika $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ adalah barisan meningkat dari himpunan-himpunan borel, maka

$$\lim_{i \to \infty} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

Bukti:
Diperhatikan bahwa $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_2 \backslash A_1) \cup (A_3 \backslash A_2) \dots$, sedemikan sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \mu(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty}(\mu(A_{i+1}) - \mu(A_i)) \\
&= \mu(A_1) + \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}(\mu(A_{i+1}) - \mu(A_i)) \\
&= \lim_{k\to\infty}\mu(A_k)
\end{aligned}
$$

Secara lebih umum, dapat ditunjukkan bahwa jika untuk $\delta > 0, A_\delta$ adalah himpunan borel yang meningkat ketika δ menurun, yaitu $A_{\delta'} \subset A_\delta$ untuk $0 < \delta < \delta'$, maka $\lim_{\delta\to 0}\mu(A_\delta) = \mu(\bigcup_{\delta>0} A_\delta)$. ■

Definisi 2.3.4
Support dari suatu ukuran ditulis dengan spt μ dan didefinisikan sebagai himpunan tertutup terkecil X sedemikian sehingga $\mu(\mathbb{R}^n \backslash X) = 0$.

Support dari suatu ukuran selalu tertutup dan suatu titik x berada dalam support jika dan hanya jika $\mu\big(B(x,\ r)\big) > 0$, untuk setiap jari-jari positif r. μ dikatakan sebagai ukuran pada himpunan A jika A memuat support dari μ.

Definisi 2.3.5
Ukuran pada himpunan bagian terbatas $\mathbb{R}^n$ dengan $0 < \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$ disebut distribusi massa dan $\mu(A)$ adalah massa dari himpunan A.

Secara intuitif, ketika diambil massa yang terbatas dan menyebarkannya dengan cara tertentu pada himpunan X untuk mendapatkan distribusi massa pada X, kondisi untuk suatu ukuran kemudian akan dipenuhi.

Contoh 2.3.1
Untuk setiap A himpunan bagian dari $\mathbb{R}^n$, $\mu(A)$ adalah banyaknya titik di dalam A jika A adalah himpunan berhingga. Sedangkan untuk A himpunan tak berhingga, maka $\mu(A) = \infty$.

Contoh 2.3.2
Misalkan a adalah sebuah titik di dalam $\mathbb{R}^n$. Didefinisikan $\mu(A) = 1$ jika A memuat a dan jika A tidak memuat a, maka $\mu(A) = 0$. Kemudian μ adalah distribusi massa dan merupakan titik massa yang terpusat pada a.

2.4 Ukuran dan Dimensi Hausdorff

2.4.1 Ukuran Hausdorff

Definisi 2.4.1.1 (Falconer, 2003: 27)
Misalkan U adalah himpunan bagian tak kosong dari $\mathbb{R}^n$. Diameter U didefinisikan sebagai

$$|U| \coloneqq sup\,\{|x-y| : x, y\ \in U\},$$

yaitu jarak terjauh dari sebarang pasangan titik dalam U.

Definisi 2.4.1.2

Misalkan F adalah himpunan bagian tak kososng dari $\mathbb{R}^n$. Jika $\{U_i\}$ adalah kumpulan himpunan terbilang dengan diameter paling besar δ dan $\{U_i\}$ menutupi F, yaitu $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, dengan $0 \leq |U_i| \leq \delta$,$\forall\ i$, maka $\{U_i\}$ disebut δ-*cover* dari F.

Definisi 2.4.1.3

Diberikan F adalah himpunan bagian tak kosong dari $\mathbb{R}^n$ dan s adalah bilangan tak negatif. Untuk setiap $\delta > 0$, didefinisikan

$$\mathcal{H}_{\delta}^{s}(F) \coloneqq \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ adalah } \delta\text{-}cover \text{ dari } F\right\}$$

Teorema 2.4.1.1 (Yohanes, 2014: 49)

Untuk $F \subseteq \mathbb{R}^n$ dan bilangan tak negatif s, berlaku, jika $\delta_1 < \delta_2$, maka $\mathcal{H}_{\delta_2}^{s}(F) \leq \mathcal{H}_{\delta_1}^{s}(F)$.

Bukti:

Misal $0 < \delta_1 < \delta_2 \leq \infty$, maka setiap δ_1-*cover* dari F adalah δ_2-*cover* dari F. Oleh karena itu, koleksi semua δ_1-*cover* dari F termuat di dalam koeksi δ_2-*cover* dari F. Akibatnya,

$$\inf\{\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \,|F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\,, |U_i| < \delta_2\} \leq \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \,|F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\,, |U_i| < \delta_1\}$$
$$\leftrightarrow \mathcal{H}_{\delta_2}^{s}(F) \leq \mathcal{H}_{\delta_1}^{s}(F).$$

■

Definisi 2.4.1.4 (Falconer, 2003: 27)

Diberikan $F \subset \mathbb{R}^n$ dan s adalah bilangan tak negatif, didefinisikan

$$\mathcal{H}^{s}(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}_{\delta}^{s}(F)$$

$\mathcal{H}^{s}(F)$ disebut ukuran Hausdorff dimensi s dari F.

Teorema 2.4.1.2 (Yohanes, 2014: 49)

Pernyataan berikut berlaku untuk setiap $\mathcal{H}^{s}$

i. $\mathcal{H}^{s}(\emptyset) = 0$

ii. $E \subseteq F \rightarrow \mathcal{H}^{s}(E) \leq \mathcal{H}^{s}(F)$

iii. Jika $\{F_j\}$ adalah koleksi terbilang dari himpunan-himpunan di $\mathbb{R}^n$, maka $\mathcal{H}^{s}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^{s}(F_j)$

iv. Jika $\{F_j\}$ adalah koleksi himpunan-himpunan yang saling asing, maka

$$\mathcal{H}^{s}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^{s}(F_j).$$

Bukti:

i. Diberikan $U_i = \emptyset, \forall i$. Maka $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ dan $|\,U_i| = 0$. Akibatnya

$$\mathcal{H}_{\delta}^{s}(F) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \mid F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\,, |\,U_i| = 0\right\} = 0$$

sehingga $\mathcal{H}^{s}(\emptyset) = 0$.

ii. Ambil sebarang δ-*cover* $\{U_i\}$ dari F. Maka $E \subseteq F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. Akibatnya $\inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \mid E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\} \leq \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \mid F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\}$ yang ekuivalen dengan $\mathcal{H}_\delta^s(E) \leq \mathcal{H}_\delta^s(F)$. Penghitungan limit untuk $\delta \to 0$ akan memperoleh pertidaksamaan $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$.

iii. Diberikan $\delta > 0$. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ dan untuk setiap j ada δ-*cover* $\{U_i^j\}$ dari F_j sedemikian sehingga $F = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$ dan $\sum_{j=1}^{\infty} |U_i^j|^s \leq \mathcal{H}_\delta^s(F_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$. Karena $\{U_i^j | i, j \in \mathbb{N}\}$ adalah koleksi terbilang yang gabungannya memuat F, maka diperoleh

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left|U_i^j\right|^s \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(F_j) + \varepsilon.$$

Akibatnya,

$$\lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j\right) \leq \lim_{\delta\to 0}\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(F_j) + \varepsilon = \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}_\delta^s(F_j) + \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_j).$$

Jadi, $\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_j)$.

iv. Ambil sebarang $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ yang saling asing dan $\delta > 0$. Maka terdapat δ-*cover* $\{U_i\}$ dari $F_1 \cup F_2$. Jika dibentuk himpunan $\{U_i^1\}$ dengan $U_i^1 = U_i \cap F_1$ dan $\{U_i^2\}$ dengan $U_i^2 = U_i \cap F_2$, maka $\{U_i^1\}$ dan $\{U_i^2\}$ adalah δ-*cover* dari F_1 dan F_2 dan $U_i^1 \cap U_i^2 = \emptyset$. Karena F_1 dan F_2 berada di $F_1 \cup F_2$, maka $\{U_i\}$ adalah δ-*cover* dari F_1 dan F_2. Akibatnya,

$$\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|U_i|^s\right\} \geq \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left|U_i^1\right|^s\right\} + \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left|U_i^2\right|^s\right\} \Leftrightarrow$$

$$\mathcal{H}_\delta^s(F_1 \cup F_2) \geq \mathcal{H}_\delta^s(F_1) + \mathcal{H}_\delta^s(F_2).$$

Jadi dicari limit untuk $\delta \to 0$, maka $\mathcal{H}_\delta^s(F_1 \cup F_2) \geq \mathcal{H}_\delta^s(F_1) + \mathcal{H}_\delta^s(F_2)$. Berdasarkan teorema 2.4.1.2 (ii), $\mathcal{H}_\delta^s(F_1 \cup F_2) \leq \mathcal{H}_\delta^s(F_1) + \mathcal{H}_\delta^s(F_2)$. Dengan demikian $\mathcal{H}_\delta^s(F_1 \cup F_2) = \mathcal{H}_\delta^s(F_1) + \mathcal{H}_\delta^s(F_2)$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{j=1}^{n} F_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{H}^s(F_j) \Rightarrow \mathcal{H}^s\left(\bigcup_{j=1}^{n+1} F_j\right) = \sum_{j=1}^{n+1} \mathcal{H}^s(F_j).$$

Karena ukuran dari gabungan kedua himpunan adalah jumlahan dari ukuran setiap himpunan, maka

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{j=1}^{n+1} F_j\right) &= \mathcal{H}^s\left(\left(\bigcup_{j=1}^{n} F_j\right) \cup F_{n+1}\right) \\
&= \mathcal{H}^s\left(\bigcup_{j=1}^{n} F_j\right) + \mathcal{H}^s\left(F_{n+1}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mathcal{H}^s\left(F_j\right) + \mathcal{H}^s\left(F_{n+1}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \mathcal{H}^s\left(F_j\right)
\end{aligned}
$$

Jika $n \to \infty$, maka persamaan tersebut terbukti. ■

Teorema 2.4.1.3. Sifat Penskalaan (Falconer, 2003: 29)
Misalkan S adalah transformasi kesamaan dengan faktor skala $\lambda > 0$. Jika $F \subset \mathbb{R}^n$, maka

$$\mathcal{H}^s(S(F)) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F).$$

Bukti:
Jika $\{U_i\}$ adalah δ-cover dari F maka $\{S(U_i)\}$ adalah $\lambda\delta$-*cover* dari $S(F)$, jadi

$$
\begin{aligned}
\sum |S(U_i)|^s &= \sum |\lambda U_i|^s \\
&= \sum |\lambda|^s |U_i|^s \\
&= \sum \lambda^s |U_i|^s \\
&= \lambda^s \sum |U_i|^s
\end{aligned}
$$

diperoleh,

$$
\begin{aligned}
\inf \sum |S(U_i|^s &\leq \lambda^s \inf \sum |U_i|^s \\
\mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(S(F)) &\leq \lambda^s \mathcal{H}^s_\delta(F)
\end{aligned}
$$

ketika $\delta \to 0$ diperoleh,

$$\mathcal{H}^s\big(S(F)\big) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(F).$$

Kemudian ganti S dengan S^{-1}, λ dengan $\frac{1}{\lambda}$, dan F dengan $S(F)$, sehingga diperoleh

$$\mathcal{H}^s\big(S(F)\big) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F).$$

■

Proposisi 2.4.1.1 (Falconer, 2003: 30)
Misalkan $F \subset \mathbb{R}^n$ pada $f; F \to \mathbb{R}^m$ sedemikian sehingga

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha, \qquad x, y \in F$$

Untuk suatu konstanta $c > 0$ dan $\alpha > 0$, maka untuk setiap s berlaku

$$\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}\big(f(F)\big) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s(F).$$

Bukti:
$\{U_i\}$ adalah δ-*cover* dari F maka $\{f(F \cap U_i)\}$ adalah ε-*cover* dari $f(F)$ karena $|f(F \cap U_i| \leq c|F \cap U_i|^\alpha \leq c|U_i|^\alpha$ dimana $\varepsilon = c\delta^\alpha$.

Diperhatikan bahwa,

$$\begin{aligned}
|f(F \cap U_i| &\leq c|F \cap U_i|^{\alpha} \\
|f(F \cap U_i|^{\frac{s}{\alpha}} &\leq (c|F \cap U_i|^{\alpha})^{\frac{s}{\alpha}} \\
|f(F \cap U_i|^{\frac{s}{\alpha}} &\leq c^{\frac{s}{\alpha}}|F \cap U_i|^{\alpha.\frac{s}{\alpha}} \\
|f(F \cap U_i|^{\frac{s}{\alpha}} &\leq c^{\frac{s}{\alpha}}|F \cap U_i|^{s} \\
\sum_i |f(F \cap U_i|^{\frac{s}{\alpha}} &\leq \sum_i c^{\frac{s}{\alpha}}|F \cap U_i|^{s} \\
\sum_i |f(F \cap U_i|^{\frac{s}{\alpha}} &\leq c^{\frac{s}{\alpha}} \sum_i |F \cap U_i|^{s}
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned}
\inf \sum_i |f(F \cap U_i|^{\frac{s}{\alpha}} &\leq c^{\frac{s}{\alpha}} \inf \sum_i |F \cap U_i|^{s} \\
\mathcal{H}_{\varepsilon}^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) &\leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}_{\delta}^{s}(F).
\end{aligned}$$

Ketika $\delta \to 0$ maka $\varepsilon \to 0$, sehingga

$$\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}\big(f(F)\big) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^{s}(F). \blacksquare$$

2.4.2 Dimensi Hausdorff

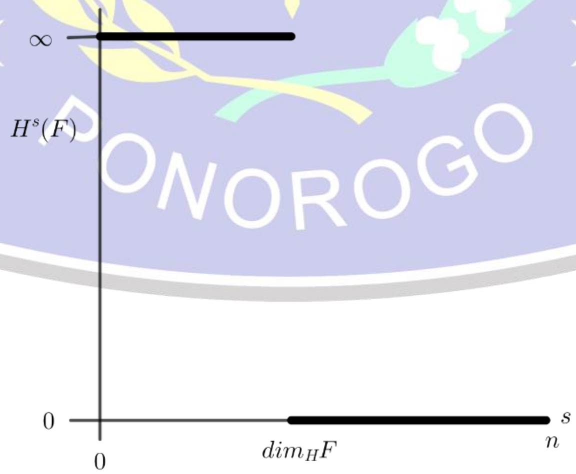
Definisi 2.4.2.1 (Falconer, 2003: 31)

Untuk setiap $F \subset \mathbb{R}^n$, dimensi Hausdorff dari F dinotasikan dengan $\dim_{\mathrm{H}}(F)$, sedemikian sehingga

$$\mathcal{H}^{s}(F) = \begin{cases} \infty, & \text{untuk } 0 \leq s < \dim_{\mathrm{H}} F \\ 0, & \text{untuk } s > \dim_{\mathrm{H}} F. \end{cases}$$

Jika $s = \dim_{\mathrm{H}} F$, maka $\mathcal{H}^{s}(F)$ mungkin 0, tak berhingga, atau memenuhi

$$0 < \mathcal{H}^{s}(F) < \infty.$$



Gambar 2. Grafik $\mathcal{H}^s$ terhadap s untuk himpunan F.

Definisi dimensi hausdorff ini secara formal dapat ditulis:

$$\dim_{\mathrm{H}} F = \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^{s}(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^{s}(F) = \infty\}.$$

Teorema 2.4.2.1 (Yohanes, 2014: 56)

i. Jika $F_! \subseteq F_2$, maka $\dim_{\mathrm{H}} F_1 \leq \dim_{\mathrm{H}} F_2$. Sifat ini disebut sifat monoton.

ii. Jika $\{F_j\}$ adalah koleksi dari himpunan di $\mathbb{R}^n$, maka

$$\dim_{\mathrm{H}}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j\right) = \sup_{1\leq i\leq\infty} \dim_{\mathrm{H}}(F_j).$$

Sifat ini disebut stabilitas terbilang.

iii. Jika $F \subseteq \mathbb{R}^n$ terbilang, maka $\dim_{\mathrm{H}}(F) = 0$.

Bukti:

i. Berdasarkan teorema 2.4.1.2 (ii), jika $F_1 \subseteq F_2$, maka $\mathcal{H}^s(F_1) \leq \mathcal{H}^s(F_2)$. Oleh karena itu, dengan menggunakan definisi akan diperoleh $(F_1) = \inf\{s: \mathcal{H}^s(F_1) = 0\} \leq \inf\{s: \mathcal{H}^s(F_2) = 0\} = \dim_{\mathrm{H}} F_2$.

ii. Misal $F = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$. Ini berarti bahwa $F_j \subseteq F, \forall\, j = 1, 2, \ldots$. Berdasarkan teorema 2.4.2.1 (i) $\dim_{\mathrm{H}}(F_j) \leq \dim_{\mathrm{H}}(F)$. Akibatnya, $\dim_{\mathrm{H}}(F) \geq \sup_{1\leq i\leq\infty} \dim_{\mathrm{H}}(F_j)$. Misalkan terdapat $s > n = \sup_{1\leq i\leq\infty} \dim_{\mathrm{H}}(F_j)$, maka berdasarkan definisi 2.4.2.1 berlaku $\mathcal{H}^s(F_j) = 0$. Menggunakan sifat adiitif terbilang diperoleh $\mathcal{H}^s(F) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_j) = 0$. Oleh karena itu, $\mathcal{H}^s(F) = 0$. Karena $\mathcal{H}^s(F) = 0$ untuk $s > n$, maka akan diperoleh $\dim_{\mathrm{H}}(F) \leq \sup_{1\leq i\leq\infty} \dim_{\mathrm{H}}(F_j)$. Jadi terbukti bahwa $\dim_{\mathrm{H}}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j\right) = \sup_{1\leq i\leq\infty} \dim_{\mathrm{H}}(F_j)$.

iii. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Diberikan $s \in (0,1)$ dan $\delta \in \left(0, \left((2^s - 1)\varepsilon\right)^{\frac{1}{s}}\right)$. Misalkan $F = \{f_i: i \in \mathbb{N}\}$ adalah himpunan terbilang dan $\{U_i\}$ adalah δ-*cover* dari F sedemikian sehingga $f_i \in U_i$ dan $0 < |U_i| = \frac{\delta}{2^i} < \delta$ untuk $i \in \mathbb{N}$. Maka $\sum_{i\in\mathbb{N}} |U_i|^s = \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\frac{\delta}{2^i}\right)^s = \delta^s \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{s.i}}$. deret tersebut adalah deret geometri dengan rasio $\frac{1}{2^s} < 1$ dan nilai awal $\frac{1}{2^s}$, sehingga $\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{s.i}} = \frac{1}{2^s - 1}$ dan $\sum_{i\in\mathbb{N}} |U_i|^s = \frac{\delta^s}{2^s - 1} < \varepsilon$. Jika dicari nilai infimumnya, maka diperoleh $\mathcal{H}_\delta^s(F) < \varepsilon$. Karena berlaku untuk setiap $0 < \delta < \left((2^s - 1)\varepsilon\right)^{\frac{1}{s}}$, maka diperoleh $\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}_\delta^s(F) \leq \varepsilon$, sehingga $\mathcal{H}^s(F) = 0$. Akan tetapi, $s > 0$, sehingga $\dim_{\mathrm{H}}(F_1)$=0 berdasarkan definisi 2.4.2.1.

■

Proposisi 2.4.2.1 (Falconer, 2003: 32)

Diberikan $F \subset \mathbb{R}^n$ dan $f: F \to \mathbb{R}^m$ memenuhi kondisi $Hölder$

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha \qquad (x, y) \in F.$$

Maka $\dim_{\mathrm{H}} f(F) \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right) \dim_{\mathrm{H}} F$.

Bukti:

jika $s > \dim_{\mathrm{H}} F$, maka berdasarkan proposisi 2.4.1.1 $\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}\big(f(F)\big) \leq c^{\frac{s}{\alpha}}\mathcal{H}^{s}(F) = 0$. Dengan menerepakan $\dim_{\mathrm{H}} f(F) \leq \left(\frac{s}{\alpha}\right), \forall\, s > \dim_{\mathrm{H}} F$, maka proposisi ini terbukti. ■

Corollary 2.4.1.1

i. Jika $f: F \to \mathbb{R}^m$ adalah transformasi Lipschitz, maka $\dim_{\mathrm{H}} f(F) \leq \dim_{\mathrm{H}} F$

ii. Jika $f: F \to \mathbb{R}^m$ adalah transformasi bi-Lipschitz, yaitu

$$c_1|x-y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x-y| \qquad (x, y \in F)$$

dimana $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$, maka $\dim_{\mathrm{H}} f(F) = \dim_{\mathrm{H}} F$.

Bukti:

Dengan menerapkan proposisi 2.4.2.1 dan mengambil $\alpha = 1$ akan diperoleh pembuktian bagian (i), yaitu $\dim_{\mathrm{H}} f(F) \leq \dim_{\mathrm{H}} F$. Kemudian terapkan proposisi 2.4.2.1 dan mengambil $\alpha = 1$ pada $f^{-1}: f(F) \to F$ maka akan diperoleh $\dim_{\mathrm{H}} f(F) = \dim_{\mathrm{H}} F$ yang memenuhi bagian (ii). ■

Proposisi 2.4.2.2 (Falconer, 2003: 33)

Himpunan $F \subset \mathbb{R}^n$ dengan $\dim_{\mathrm{H}} F < 1$ adalah himpunan terpisah total.

Bukti:

Diberikan x dan y adalah titik yang berbeda dalam F. Didefinisikan pemetaan $f: \mathbb{R}^n \to \{0, \infty)$ dengan $f(z) = |z - x|$. Karena f tidak menambah jarak, sementara $|f(z) - f(w) = \big||z-x| - |w-x|\big| \leq |(z-x) - (w-x)| = |z - w|$, berdasarkan corollary 2.4.2.1 $\dim_{\mathrm{H}} f(F) < 1 \leq \dim_{\mathrm{H}} F < 1$. Jadi $f(F)$ adalah himpunan bagian dari $\mathbb{R}$ dari ukuran-$\mathcal{H}^1$ atau panjang 0, dan memiliki komplemen yang padat. Ambil r dengan $r \notin f(F)$ dan $0 < r < f(y)$ yang berarti bahwa

$$F = \{z \in F: |z - x| < r\} \cup \{z \in F: |z - x| > r\}.$$

Jadi F termuat dalam dua himpunan terbuka terpisah dengan x dalam salah satu himpunan tersebut dan y dalam himpunan yang lainnya, sehingga x dan y terletak dalam komponen terhubung yang berbeda di dalam F. ■

2.5 Dimensi Hitung Kotak

Dimensi hitung kotak adalah salah satu metode yang sering digunakan untuk menentukan dimensi fraktal karena teknik penghitungannya yang relatif mudah.

Definisi 2.5.1 (Falconer, 2003: 41)

Diberikan F himpunan bagian terbatas tak kososng dari $\mathbb{R}^n$ dan $N_\delta(F)$ adalah jumlah minimum himpunan-himpunan yang berdiameter tidak lebih dari δ yang dapat menyelimuti F. Dimensi hitung kotak bawah dan atas dari F secara berturut-turut adalah

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \overline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

Jika $\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F$, maka dimensi hitung kotak dari F adalah

$$\dim_{\mathrm{B}} F = \lim_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

Ada beberapa definisi dimensi hitung kotak lain yang setara dan terkadang lebih sesuai untuk digunakan. Berikut adalah definisi lain dari dimensi hitung kotak.

Definisi 2.5.2 (Falconer, 2003: 43)
Dimensi hitung kotak bawah dan atas dari $F \subset \mathbb{R}^n$ didefinisikan

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \underline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \overline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

dan dimensi hitung kotak dari F adalah

$$\dim_{\mathrm{B}} F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

dimana $N_\delta(F)$ adalah salah satu dari

i. Jumlah minimum dari bola tertutup dengan jari-jari δ yang menyelimuti F.
ii. Jumlah minimum darai kubus dengan panjang sisi δ yang menyelimuti F.
iii. Banyaknya kubus δ-*mesh* yang beririsan dengan F.
iv. Jumlah minimum dari himpunan-himpunan dengan diameter tidak lebih dari δ yang menyelimuti F.
v. Jumlah maksimum dari bola-bola terpisah berjari-jari δ dengan pusat di dalam F.

Proposisi 2.5.1. (Falconer, 2003: 45)
Jika F adalah himpunan bagian dari $\mathbb{R}^n$, maka

$$\underline{\dim}_B F = n - \overline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\log\ vol^n\ (F_\delta)}{\log \delta}$$

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F = n - \underline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\log\ vol^n\ (F_\delta)}{\log \delta}$$

dimana F_δ adalah persekitaran-δ dari F.

Penting untuk memahami hubugan antara dimensi hitung kotak dan dimensi hausdorff. jika F dapat tercover oleh himpunan-himpunan $N_\delta(F)$, maka $\mathcal{H}^s_\delta(F) \leq N_\delta(F)\delta^s$. Jika $1 < \mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(F)$, maka $\log N_\delta(F) + s \log \delta > 0$, untuk δ yang cukup kecil. Kemudian $s \leq \underline{\lim}_{\delta \to 0} \log N_\delta(F) / -\log \delta$, jadi $dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F$ untuk setiap $F \subset \mathbb{R}^n$.

Proposisi 2.5.2. Prinsip Distribusi Massa (Falconer, 2003: 60)
Misalkan μ adalah distribusi massa dari F dan untuk suatu s terdapat $c > 0$ dan $\varepsilon > 0$, sedemikian hingga

$$\mu(U) \leq c|U|^s$$

untuk semua himpunan U, dengan $|U| \leq \varepsilon$. Kemudian $\mathcal{H}^s(F) \geq \mu(F)/c$ dan

$$s \leq \dim_{\mathrm{H}} F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F.$$