BAB 2

KAJIAN PUSTAKA

2.1. Persamaan Diferensial

Definisi 2.1.1. Persamaan diferensial adalah suatu bentuk persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas (Ross, 2010).

Persamaan diferensial dapat dinotasikan sebagai $y' = \frac{dy}{dx}$ atau $x' = \frac{dx}{dt}$. Berdasarkan banyaknya variabel bebas yang terlibat, persamaan diferensial dapat diklasifikasikan menjadi persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

Definisi 2.1.2. Persamaan diferensial biasa adalah suatu bentuk persamaan yang memuat turunan satu atau lebih variabel terikat terhadap satu variabel bebas (Ross, 2010).

Contoh:

(1) $\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$

(2) $\frac{d^4x}{dt^2} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 3x = \sin t$

Kedua persamaan di atas merupakan contoh persamaan diferensial biasa dimana pada persamaan (1), variabel x merupakan variabel bebas dan y adalah variabel terikat, sedangkan pada persamaan (2), variabel t merupakan variabel bebas dan x adalah variabel terikat.

Definisi 2.1.3. Persamaan diferensial parsial adalah suatu bentuk persamaan yang memuat turunan parsial dari satu atau lebih variabel terikat terhadap lebih dari satu variabel bebas (Ross, 2010).

Contoh:

(1) $\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v$

(2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

Kedua persamaan di atas merupakan contoh persamaan diferensial parsial dimana pada persamaan (1), variabel s dan t merupakan variabel bebas dan v adalah variabel terikat, sedangkan pada persamaan (2), variabel x, y, dan z merupakan variabel bebas dan u adalah variabel terikat.

Dari contoh-contoh di atas, persamaaan diferensial dapat diklasifikasikan berdasarkan pangkat tertinggi turunan yang muncul pada persamaan. Berikut diberikan pengertian pangkat tertinggi (orde) dari suatu persamaan diferensial.

Definisi 2.1.4. Orde suatu persamaan diferensial merupakan pangkat tertinggi turunan dalam persamaan diferensial (Ross, 2010).

Contoh:

(1) Persamaan $\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$ merupakan persamaan diferensial biasa orde 2.

(2) Persamaan $\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v$ merupakan persamaan diferensial parsial orde satu.

Definisi 2.1.5. (LINEARITAS PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA) Persamaan diferensial biasa linear orde n dengan variabel terikat y dan variabel bebas x adalah sebuah persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x)$$

dimana $a \neq 0$ (Ross, 2010).

Dari definisi tersebut, dapat diketahui bahwa suatu persamaan diferensial biasa dikatakan linear jika:

1. Variabel terikat dan berbagai turunannya hanya sampai pangkat tertinggi (orde) 1.
2. Tidak terdapat perkalian antara variabel terikat dan/atau dengan setiap turunan yang termuat.
3. Tidak terdapat fungsi transedental dari variabel terikat y dan/atau turunannya.

Persamaan diferensial biasa linear orde satu dengan variabel terikat y dan variabel bebas x adalah sebuah persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$y'(x) + P(x)y = Q(x)$$

Himpunan atau koleksi dari beberapa persamaan diferensial yang diselesaikan bersama disebut dengan sistem persamaan diferensial. Jika himpunan persamaan diferensial tersebut orde satu, maka sistem persamaannya disebut dengan sistem persamaan diferensial orde satu. Berikut diberikan definisi mengenai sistem persamaan diferensial linear orde satu menurut Simmons (2017).

Definisi 2.1.6. (SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE SATU) Sistem persamaan diferensial linear orde satu adalah sistem yang berbentuk

$$x'(t) = a_1(t)x + b_1(t) + f_1(t)$$
$$y'(t) = a_2(t)x + b_2(t) + f_2(t)$$

dimana fungsi $a_i(t)$, $b_i(t)$, dan $f_i(t)$, dengan $i = 1,2$, adalah fungsi kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ pada sumbu-t.

2.2. Masalah Nilai Awal dan Nilai Batas

Definisi 2.2.1. Masalah nilai awal pada suatu persamaan adalah apabila semua kondisi tambahan yang diberikan pada suatu persamaan hanya terikat pada satu nilai x (Ross, 2010).

Contoh: Diberikan persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ dengan kondisi awal $y(1) = 3$.

Definisi 2.2.2. Masalah nilai batas suatu persamaan adalah apabila semua kondisi tambahan yang diberikan pada suatu persamaan terikat pada dua nilai x yang berbeda (Ross, 2010).

Contoh: Diberikan persamaan diferensial $\frac{d^2y}{d^2x} + y = 0$ dengan kondisi batas $y(0) = 0$ dan $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

2.3. Persekitaran

Definisi 2.3.1. Persekitaran dari suatu titik, misal titik x, adalah himpunan titik-titik yang memuat titik x yang mana bisa dipindahkan ke arah manapun dari titik x tanpa meninggalkan himpunan tersebut.

2.4. Deret Taylor

Deret Taylor adalah representasi fungsi matematika sebagai jumlahan tak hingga dari suku-suku yang nilainya dihitung dari turunan fungsi tersebut di suatu titik. Deret Taylor digunakan untuk mengaproksimasi nilai-nilai fungsi yang sulit dihitung secara manual. Untuk memperoleh deret Taylor, digunakan Teorema Taylor sebagai berikut.

Teorema 2.3.1 (TEOREMA TAYLOR) Misalkan f fungsi yang terdiferensial sebanyak $(n+1)$ kali, ditulis $f^{(n+1)}$, pada interval terbuka I yang berisi titik x_0 dan x. Maka,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

dimana

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

untuk sebarang bilangan c antara x_0 dan x.

Bukti:

Bentuk

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

dapat ditulis menjadi

$$R_n(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Untuk t antara x dan x_0, definisikan $F(t)$, yaitu

$$F(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

sehingga diperoleh $F(x_0) = R_n(x)$. Kemudian,

$$\begin{aligned} F'(t) &= -f'(t) - f''(t)(x-t) + f'(t) - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + f''(t)(x-t) - \\ &\quad \cdots - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} \\ F'(t) &= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \end{aligned}$$

Dengan mendefinisikan

$$G(t) = F(t) - \left(\frac{x-t}{x-x_0}\right)^{n+1} F(x_0)$$

diperoleh $G(x_0) = 0$ dan $G(x) = F(x) = 0$. Dengan mengaplikasikan Teorema Rolle's pada fungsi G, menunjukkan bahwa ada c antara x dan x_0 dengan $G'(c) = 0$.

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} 0 = G'(c) &= F'(c) + (n+1)\frac{(x-c)^n}{(x-x_0)^{n+1}}F(x_0) \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n + (n+1)\frac{(x-c)^n}{(x-x_0)^{n+1}}F(x_0) \end{aligned}$$

Karena $F(x_0) = R_n(x)$, diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n + (n+1)\frac{(x-c)^n}{(x-x_0)^{n+1}}F(x_0) \\ 0 &= -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n + (n+1)\frac{(x-c)^n}{(x-x_0)^{n+1}}R_n(x) \\ (n+1)\frac{(x-c)^n}{(x-x_0)^{n+1}}R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n \\ R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n \times \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)(x-c)^n} \\ R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)\cdot n!}(x-x_0)^{n+1} \\ R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

■

Pada Teorema Taylor di atas, $R_n(x)$ disebut dengan sisa atau galat (eror). Jika nilai limit dari $R_n(x)$ untuk $n \to \infty$ adalah mendekati nol, ditulis $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \end{aligned}$$

Bentuk persamaan $f(x)$ di atas merupakan bentuk ekspansi deret pangkat yang kemudian disebut sebagai deret Taylor dari f. Deret Taylor dengan nilai $x_0 = 0$ disebut dengan deret Maclaurin (deret Taylor baku). Dengan kata lain, deret Maclaurin merupakan bentuk khusus dari deret Taylor, yaitu ketika nilai $x_0 = 0$.

Contoh:

Bentuk deret Taylor dari $f(x) = \sin x$ diperoleh dengan menjumlahkan hasil substitusi nilai $x_0 = 0$ ke dalam fungsi f dan seluruh turunan fungsi f.

Fungsi	**Nilai Fungsi untuk $x_0 = 0$**
$f(x_0) = \sin x$	$f(0) = \sin 0 = 0$
$f'(x_0) = \cos x$	$f'(0) = \cos 0 = 1$
$f''(x_0) = -\sin x$	$f''(0) = -\sin 0 = 0$
$f'''(x_0) = -\cos x$	$f'''(0) = -\cos 0 = -1$
$f^{(4)}(x_0) = \sin x$	$f^{(4)}(x_0) = \sin 0 = 0$
$f^{(5)}(x_0) = \cos x$	$f^{(5)}(x_0) = \cos 0 = 1$
dst.	dst.

Diperoleh

$$
\begin{aligned}
f(x)=\sin x \quad &= \quad f(0)+f'(0)(x-0)+\frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2+\frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^2+\\
&\quad\ \frac{f^{(4)}(0)}{4!}(x-0)^2+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}(x-0)^2+\cdots\\
&= \quad 0+1(x)+\frac{0}{2!}(x)^2+\frac{(-1)}{3!}(x)^2+\frac{0}{4!}(x-0)^2+\frac{1}{5!}(x-0)^2+\cdots\\
&= \quad x-\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^2+\cdots
\end{aligned}
$$

Jadi, deret Taylor dari $\sin x = x-\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^2+\cdots$.

2.5. Fungsi Analitik

Definisi 2.5.1. Fungsi $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ dikatakan analitik pada titik $x=x_0$ jika fungsi tersebut mempunyai ekspansi deret Taylor pada pangkat $(x-x_0)$ yang berlaku untuk setiap x pada persekitaran x_0 (Tenenbaum & Pollard, 1963).

Berikut diberikan contoh fungsi analitik beserta ekspansi deret Taylornya, yaitu

a. $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$

b. $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$

c. $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$

d. $\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$

Fungsi konstan merupakan fungsi analitik. Hal ini disebabkan karena seluruh turunan dari fungsi konstan adalah 0 dan nilai fungsinya juga 0. Sehingga, ekspansi deret Taylor fungsi konstan akan bernilai sama dengan fungsi itu sendiri. Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut:

Diberikan fungsi $f(x)=9$. Maka,

$f(x_0)=9$	$f(0)=9$
$f'(x_0)=0$	$f'(0)=0$
$f''(x_0)=0$	$f''(0)=0$
Dst.	Dst.

Sehingga, ekspansi deret Taylornya adalah

$$
\begin{aligned}
f(x)=9 \quad &= \quad f(0)+f'(0)(x-0)+\frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2+\frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^2+\\
&\quad\ \frac{f^{(4)}(0)}{4!}(x-0)^2+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}(x-0)^2+\cdots\\
&= \quad 9+0(x)+\frac{0}{2!}(x)^2+\frac{0}{3!}(x)^2+\frac{0}{4!}(x)^2+\frac{0}{5!}(x)^2+\cdots\\
&= \quad 9+0+0+0+\cdots\\
&= \quad 9
\end{aligned}
$$

Di sisi lain, tidak semua fungsi merupakan fungsi analitik. Hal ini disebabkan karena fungsi tersebut tidak mempunyai ekpansi deret Taylor di suatu titik. Sebagai contoh, fungsi nilai mutlak $f(x)=|x|$. Fungsi tersebut tidak analitik sebab tidak mempunyai ekspansi deret Taylor pada titik $x=0$.

2.6. *Ordinary Point*

Definisi 2.6.1. Sebuah titik $x = x_0$ dikatakan *ordinary point* dari persamaan diferensial linear

$$y^{(n)} + F_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + F_1(x)y' + F_0(x)y = Q(x)$$

jika setiap fungsi $F_0,\ F_1,\ \cdots,\ F_{n-1}$, dan Q analitik pada $x = x_0$ (Tenenbaum & Pollard, 1963).

Dari definisi 2.6.1., dapat diartikan bahwa setiap fungsi $F_0,\ F_1,\ \cdots,\ F_{n-1}$, dan Q punya ekspansi deret taylor pada pangkat $x - x_0$ yang berlaku pada suatu persekitaran x_0. Sehingga, jika $x = x_0$ adalah suatu *ordinary point*, maka persamaan diferensial di atas mempunyai solusi yang mana juga analitik pada $x - x_0$, yaitu solusi tersebut mempunyai representasi deret Taylor pada pangkat dari $(x - x_0)$ yang berlaku pada suatu persekitaran dari x_0. Hal ini dijelaskan dalam teorema berikut.

Teorema 2.6.1. Jika setiap fungsi $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x), Q(x)$ pada persamaan

$$y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_1(x)y' + f_0(x)y = Q(x) \qquad (2.6.1)$$

analitik pada $x = x_0$, yaitu setiap fungsi mempunyai ekspansi deret Taylor pada pangkat $(x - x_0)$ yang berlaku untuk $|x - x_0| < r$, maka ada dengan tunggal solusi $y(x)$ dari persamaan (2.6.1) yang mana juga analitik pada $x = x_0$, yang memenuhi n kondisi awal

$$y(x_0) = a_0, y'(x_0) = a_{1,} y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1},$$

yaitu solusi tersebut mempunyai ekspansi deret Taylor pada pangkat $(x - x_0)$ yang juga berlaku untuk $|x - x_0| < r$.

Bukti:

Dari persamaan (2.6.1), ambil bentuk persamaannya adalah

$$y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = Q(x) \qquad (1)$$

Berdasarkan definisi 2.6.1., titik $x = x_0$ merupakan *ordinary point*. Ambil $x_0 = 0$ sehingga difokuskan pada persekitaran nol. Perhatikan bahwa jika $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergen pada $|x| \le r_0$, maka $|a_k||x|^k \to 0$ dengan $k \to \infty$ sehingga dapat diambil

$$r^k|a_k| \le M \qquad (2)$$

untuk $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ dan $r < r_0$ dimana M suatu konstanta.

Karena $x = x_0 = 0$ merupakan *ordinary point*, fungsi $f_1(x)$ dan $f_0(x)$ analitik pada persekitaran dari nol sehingga dapat ditulis dalam deret pangkat

$$f_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k \text{ dan } f_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k \qquad (3)$$

yang mana kedua deret pangkat tersebut konvergen pada $|x| \le r_0$ untuk sebarang $r_0 > 0$.

Selanjutnya, akan dicari solusi $y(x)$ yang mana analitik pada $|x| \le r_0$ dan memenuhi $y(x_0) = a_0$ dan $y'(x_0) = a_1$.

Misal

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad (4)$$

merupakan solusi dari persamaan (1).

Maka,

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} ka_k x^{k-1}$$

$$y'(x) = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} ka_k x^{k-1}$$

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1} x^{k} \qquad (5)$$

dan

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k+1)a_{k+1} x^{k-1}$$

$$y''(x) = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)a_{k+1} x^{k-1}$$

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)a_{k+2} x^{k}$$

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2} x^{k} \qquad (6)$$

Sehingga,

$$f_1(x)y'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1} x^k\right) \qquad (7)$$

Dengan menggunakan hasil kali Cauchy dari dua deret, yaitu

$$\begin{aligned}
&\left(p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_kx^k + \cdots\right)\left(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + ka_kx^{k-1}\right.\\
&\quad\left. + (k+1)a_{k+1}x^k + \cdots\right)\\
&= p_0a_1 + p_0 2a_2x + p_0 3a_3x^2 + \cdots + p_0ka_kx^{k-1} + \cdots + p_1a_1x\\
&\quad + p_1 2a_2x^2 + p_1 3a_3x^3 + \cdots + p_1ka_kx^k + \cdots + p_2a_1x^2 + p_2 2a_2x^3\\
&\quad + p_2 3a_3x^4 + \cdots + p_2ka_kx^{k+1} + \cdots + p_ka_1x^k + p_k 2a_2x^{k+1}\\
&\quad + p_k 3a_3x^{k+2} + \cdots\\
&= p_0a_1 + (p_0 2a_2 + p_1a_1)x + (p_0 3a_3 + p_1 2a_2 + p_2a_1)x^2 + \cdots\\
&\quad + (p_ka_1 + p_{k-1}2a_2 + p_{k-2}3a_3 + \cdots + p_0(k+1)a_{k+1})x^k + \cdots\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} p_{k-j}(j+1)a_{j+1}\right)x^k
\end{aligned}$$

diperoleh

$$f_1(x)y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} p_{k-j}(j+1)a_{j+1}\right)x^k \qquad (8)$$

Karena deret untuk $f_1(x)$ dan $y'(x)$ konvergen, maka hasil kali Cauchy pada (8) juga konvergen pada $|x| < r_0$.

Dengan cara yang sama,

$$f_0(x)y(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)$$

Dengan menggunakan hasil kali Cauchy dari dua deret, yaitu

$$\begin{aligned}(q_0 + q_1x + q_2x^2 + \cdots + q_kx^k + \cdots)&(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k + \cdots)\\ &= q_0a_0 + q_0a_1x + q_0a_2x^2 + \cdots + q_0a_kx^k + \cdots + q_1a_0x + q_1a_1x^2\\ &+ q_1a_2x^3 + \cdots + q_1a_kx^{k+1} + \cdots + q_2a_0x^2 + q_2a_1x^3 + q_2a_2x^4 + \cdots\\ &+ q_2a_kx^{k+2} + \cdots + q_ka_0x^k + q_ka_1x^{k+1} + q_ka_2x^{k+2} + \cdots\\ &= q_0a_0 + (q_0a_1 + q_1a_0)x + (q_0a_2 + q_1a_1 + q_2a_0)x^2 + \cdots\\ &+ (q_0a_k + q_1a_{k-1} + q_2a_{k-2} + \cdots + q_ka_0)x^k + \cdots\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} q_{k-j}a_j\right)x^k\end{aligned}$$

diperoleh

$$f_0(x)y(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} q_{k-j}a_j\right)x^k \qquad (9)$$

Karena deret untuk $f_0(x)$ dan $y(x)$ konvergen, maka hasil kali Cauchy pada (9) juga konvergen pada interval konvergensi $|x| < r_0$.

Dengan mensubstitusikan (6), (8), dan (9) pada (1), yaitu

$$y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = Q(x)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} p_{k-j}(j+1)a_{j+1}\right)x^k + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} q_{k-j}a_j\right)x^k = Q(x)$$

diperoleh

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left((k+2)(k+1)a_{k+2} + \sum_{j=0}^{k} p_{k-j}(j+1)a_{j+1} + \sum_{j=0}^{k} q_{k-j}a_j\right)x^k = Q(x) \qquad (10)$$

Asumsikan $Q(x) = 0$. Karena jumlah dari deret pangkat (10) adalah nol, setiap koefisien dari x^k adalah nol untuk $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ pada interval konvergensi. Sehingga,

$$\begin{aligned}(k+2)(k+1)a_{k+2} + \sum_{j=0}^{k} p_{k-j}(j+1)a_{j+1} + \sum_{j=0}^{k} q_{k-j}a_j &= 0\\ (k+2)(k+1)a_{k+2} &= -\sum_{j=0}^{k}\left[p_{k-j}(j+1)a_{j+1} + q_{k-j}a_j\right]\end{aligned}$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$(k+2)(k+1)|a_{k+2}| \le \sum_{j=0}^{k}\left[|p_{k-j}|(j+1)|a_{j+1}| + |q_{k-j}||a_j|\right] \qquad (11)$$

Misal r merupakan sebarang bilangan positif sehingga $r < r_0$.

Karena deret pangkat untuk $f_1(x)$ dan $f_0(x)$ konvergen untuk $r = r_0$, maka ada dengan tunggal konstanta $M > 0$ sedemikian hingga

$$|p_k|r^k \leq M \text{ dan } |q_k|r^k \leq M \qquad (12)$$

untuk sebarang $r < r_0$ dan untuk semua k.

Dengan mensubstitusikan (12) ke (11), diperoleh

$$\begin{aligned}(k+2)(k+1)|a_{k+2}| &\leq \sum_{j=0}^{k}\left[\frac{M}{r^{k-j}}(j+1)|a_{j+1}| + \frac{M}{r^{k-j}}|a_j|\right] \\ &= \frac{M}{r^k}\sum_{j=0}^{k}\left[(j+1)|a_{j+1}| + |a_j|\right]r^j \qquad (13)\end{aligned}$$

Untuk lebih menguatkan bentuk pertidaksamaan di atas, tambahkan $M|a_{k+1}|r$ pada ruas kanan dari pertidaksamaan (13), yaitu

$$(k+2)(k+1)|a_{k+2}| \leq \frac{M}{r^k}\sum_{j=0}^{k}\left[(j+1)|a_{j+1}| + |a_j|\right]r^j + M|a_{k+1}|r$$

Definisikan $b_0 = |a_0|$, $b_1 = |a_1|$, dan $b_{k+2} = |a_{k+2}|$ untuk $k \geq 0$, yaitu

$$(k+1)(k+2)b_{k+2} = \frac{M}{r^k}\sum_{j=0}^{k}\left[(j+1)b_{j+1} + b_j\right]r^j + Mb_{k+1}r \qquad (14)$$

Dari pendefinisian tersebut, dapat diketahui bahwa $0 < |a_k| \leq b_k$ untuk semua k. Selanjutnya, deret $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ dapat dibandingkan dengan deret $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Dari (14), akan dibuat deret $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$. Misal, pada persamaan (14), k diganti dengan $(k-1)$, maka diperoleh

$$k(k+1)b_{k+1} = \frac{M}{r^{k-1}}\sum_{j=0}^{k-1}\left[(j+1)b_{j+1} + b_j\right]r^j + Mb_k r \qquad (15)$$

Selain itu, pada persamaan (14), k juga diganti dengan $(k-2)$, maka diperoleh

$$(k-1)kb_k = \frac{M}{r^{k-2}}\sum_{j=0}^{k-2}\left[(j+1)b_{j+1} + b_j\right]r^j + Mb_{k-1}r \qquad (16)$$

Kalikan persamaan (15) dengan r, yaitu

$$\begin{aligned}rk(k+1)b_{k+1} &= r\frac{M}{r^{k-1}}\sum_{j=0}^{k-1}\left[(j+1)b_{j+1} + b_j\right]r^j + Mb_k r^2 \\ rk(k+1)b_{k+1} &= \frac{M}{r^{k-2}}\sum_{j=0}^{k-1}\left[(j+1)b_{j+1} + b_j\right]r^j + Mb_k r^2 \\ rk(k+1)b_{k+1} &= \frac{M}{r^{k-2}}\left(\sum_{j=0}^{k-2}\left[(j+1)b_{j+1} + b_j\right]r^j + [(k-1+1)b_{k-1+1} + b_{k-1}]r^{k-1}\right) \\ &\quad + Mb_k r^2 \\ rk(k+1)b_{k+1} &= \frac{M}{r^{k-2}}\sum_{j=0}^{k-2}\left[(j+1)b_{j+1} + b_j\right]r^j + \frac{M}{r^{k-2}}[(k)b_k + b_{k-1}]r^{k-1} + Mb_k r^2\end{aligned}$$

$$rk(k+1)b_{k+1} \quad = \quad \frac{M}{r^{k-2}}\sum_{j=0}^{k-2}\left[(j+1)b_{j+1}+b_j\right]r^j+(kb_k+b_{k-1})Mr+Mb_kr^2$$

Diperoleh

$$rk(k+1)b_{k+1}-(kb_k+b_{k-1})Mr-Mb_kr^2=\frac{M}{r^{k-2}}\sum_{j=0}^{k-1}\left[(j+1)b_{j+1}+b_j\right]r^j \qquad (17)$$

Dari (16), diperoleh

$$k(k-1)b_k \quad = \quad \frac{M}{r^{k-2}}\sum_{j=0}^{k-2}\left[(j+1)b_{j+1}+b_j\right]r^j+Mb_{k-1}r$$

$$k(k-1)b_k-Mb_{k-1}r \quad = \quad \frac{M}{r^{k-2}}\sum_{j=0}^{k-2}\left[(j+1)b_{j+1}+b_j\right]r^j$$

Dengan menggunakan ruas kiri dari (17), diperoleh

$$\begin{aligned}
k(k-1)b_k-Mb_{k-1}r &= \frac{M}{r^{k-2}}\sum_{j=0}^{k-2}\left[(j+1)b_{j+1}+b_j\right]r^j\\
k(k-1)b_k-Mb_{k-1}r &= rk(k+1)b_{k+1}-(kb_k+b_{k-1})Mr-Mb_kr^2\\
rk(k+1)b_{k+1} &= k(k-1)b_k-Mb_{k-1}r+(kb_k+b_{k-1})Mr+Mb_kr^2\\
rk(k+1)b_{k+1} &= k(k-1)b_k-Mb_{k-1}r+Mrkb_k+Mrb_{k-1}+Mb_kr^2\\
rk(k+1)b_{k+1} &= [k(k-1)+Mrk+Mr^2]b_k \qquad (18)
\end{aligned}$$

Dari (18) diperoleh

$$\frac{b_{k+1}}{b_k}=\frac{k(k-1)+rMk+Mr^2}{rk(k+1)}\to\frac{1}{r}\text{ untuk } k\to\infty$$

Sehingga,

$$\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\frac{x^{k+1}}{x^k}\right|=\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right||x|\to\frac{|x|}{r}$$

Maka, deret $\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k$ konvergen untuk $|x|<r$. Jadi, dengan uji perbandingan $\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ konvergen, sehingga persamaan (1) mempunyai sebuah solusi deret pangkat konvergen yaitu persamaan (4) yang memenuhi $y(x_0)=a_0$ dan $y'(x_0)=a_1$. ■

2.7. Deret Pangkat

Deret pangkat (*power series*) merupakan deret fungsi yang berupa kombinasi linear takberhingga monomial $1, x, x^2, x^3, \cdots$, yaitu

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots \qquad (2.7.1)$$

dimana $a_0, a_1, a_2, \cdots$ merupakan konstanta dan x adalah variabel .

Bentuk di atas merupakan bentuk deret pangkat dalam x. Untuk sebuah bilangan real x_0, deret pangkat bentuk $(x-x_0)$ dinyatakan sebagai

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots \qquad (2.7.2)$$

dimana $a_0, a_1, a_2, \cdots$ dan x_0 merupakan kontanta dan x adalah variabel.
Kedua bentuk deret pangkat tersebut, yaitu deret (2.7.1) dan (2.7.2), adalah ekuivalen sebab bentuk pertama bisa diperoleh dari bentuk kedua dengan mengambil variabel baru $y \coloneqq x - x_0$ (Hernadi, 2015).

Suatu deret bisa saja konvergen ke suatu titik, suatu interval, atau bahkan tidak konvergen kemanapun. Interval konvergensi suatu deret dapat diketahui melalui uji konvergensi deret. Uji konvergensi deret dapat dilakukan dengan beberapa metode, salah satunya dengan menggunakan uji rasio. Uji konvergensi deret menggunakan uji rasio diberikan pada teorema berikut.

Teorema 2.7.1. Misalkan deret $\sum x_n$ suku-sukunya positif dan misalkan

$$L = \lim \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$$

maka berlaku pernyataan berikut:

1. Jika $L < 1$ maka deret konvergen.
2. Jika $L > 1$ maka deret divergen.
3. Jika $L = 1$ maka uji gagal, yaitu tidak dapat ditarik kesimpulan apapun.

Bukti:

(1) Berdasarkan definisi limit barisan, yaitu "bilangan real x dikatakan limit dari (x_n) jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sehingga berlaku $|x - x_n| < \varepsilon$ untuk setiap $n \geq N$", maka terdapat K bilangan asli cukup besar sehingga

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < L \text{ untuk setiap } n \geq K.$$

Secara rekursif diperoleh hubungan sebagai berikut

$$x_{n+1} < Lx_n < L^2 x_{n-1} < L^3 x_{n-2} < \cdots < L^n x_1.$$

Dengan mengambil deret geometri $\sum L^n$ sebagai pembanding maka diperoleh $\sum x_{n+1} < x_1 \sum L^n$. Mengingat $L < 1$ maka deret geometri ini konvergen, sehingga deret $\sum x_{n+1}$ konvergen. Dengan sifat ekor deret, maka disimpulkan deret $\sum x_n$ konvergen.

(2) Analog dengan pembuktian sebelumnya, maka diperoleh $\frac{x_{n+1}}{x_n} > L$ untuk setiap $n \geq K$ sehingga diperoleh perbandingan $\sum x_{n+1} > x_1 \sum L^n$. Mengingat $L > 1$ maka deret geometri ini divergen, sehingga deret $\sum x_{n+1}$ divergen. Dengan sifat ekor deret, maka disimpulkan deret $\sum x_n$ divergen.

(3) Untuk $L = 1$, tidak dapat dibuat perbandingan dengan deret geometri, sehingga tidak dapat membandingkan dua suku berurutan x_n dan x_{n+1}. Meskipun limitnya bernilai 1, namun kedua suku tersebut dapat saja saling mendominasi (kadang lebih besar, kadang lebih kecil) sehingga tidak dapat disimpulkan. ■

Ada beberapa kemungkinan terkait kekonvergenan deret pangkat, yaitu:

1. Deret pangkat konvergen untuk nilai tunggal (satu nilai), yaitu $x = x_0$.
   Contoh:
   Tentukan interval konvergensi dari deret pangkat

$$1 + 1!\,x + 2!\,x^2 + 3!\,x^3 + \cdots + n!\,x^n + \cdots \tag{2.7.3}$$

Jawab:
Dari deret di atas, dapat diketahui bahwa $x_n = n!\,x^n$ dan $x_{n+1} = (n+1)!\,x^{n+1}$. Misalkan $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = L$. Sehingga,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{n!\,x^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)}{n!}\right)\cdot\frac{x^n\cdot x}{x^n} = Lx$$

Dengan demikian, untuk setiap $L \neq 0$,

- Deret pangkat (2.7.3) konvergen jika $Lx < 1$ atau $x < \frac{1}{L}$.
- Deret pangkat (2.7.3) divergen jika $Lx > 1$ atau $x > \frac{1}{L}$.

Nilai $\frac{1}{L}$ disebut radius kekonvergenan. Sekalipun nilai $\lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty > 1$ divergen, tetapi terdapat $(-R + x_0, x_0 + R)$ yang berpusat di $x_0 = 0$ dan radius R dimana deret pangkat konvergen. Jika $R = 0$, maka deret pangkat konvergen hanya untuk $x = x_0 = 0$.

2. Deret pangkat konvergen sepenuhnya untuk nilai x pada suatu persekitaran dari x_0, yaitu konvergen untuk $|x - x_0| < R$ dan divergen untuk $|x - x_0| > R$, dengan $R > 0$. Pada titik akhir ($end\ point$) $x_0 \pm R$, deret pangkat bisa jadi konvergen atau divergen.
Contoh:
Tentukan interval konvergensi dari deret pangkat

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{1}{n}x^n + \cdots \tag{2.7.4}$$

Jawab:
Dari deret di atas, dapat diketahui bahwa $x_n = \frac{1}{n}x^n$ dan $x_{n+1} = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$. Sehingga,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n+1}x^{n+1}}{\frac{1}{n}x^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right)\cdot\frac{x^n\cdot x}{x^n} = x$$

Maka,

- Deret pangkat (2.7.4) konvergen jika $x < 1$.
- Deret pangkat (2.7.4) divergen jika $x > 1$.

Dengan demikian, radius kekonvergenan deret tersebut adalah 1 dan pusat deretnya adalah $x_0 = 0$, yaitu $(0 - 1\,, 1 + 0) = (-1{,}1)$. Selain itu, deret itu divergen pada $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Cek kekonvergenan di ujung-ujung interval $(-1{,}1)$. Perhatikan
Untuk $x = -1$,

$$1 + (-1) + \frac{1}{2}(-1)^2 + \frac{1}{3}(-1)^3 + \cdots \text{ jelas konvergen.}$$

Untuk $x = 1$,

$$1 + 1 + \frac{1}{2}(1)^2 + \frac{1}{3}(1)^3 + \cdots \text{ jelas divergen.}$$

Maka, interval kekonvergenan deret (2.7.4) adalah $[-1{,}1)$ atau $-1 \le x < 1$.

3. Deret pangkat konvergen sepenuhnya untuk semua nilai x, yaitu untuk $-\infty < x < \infty$.

Contoh:
Tentukan interval konvergensi dari deret pangkat

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\cdots \tag{2.7.5}$$

<u>Jawab:</u>

Dari deret di atas, dapat diketahui bahwa $x_n=\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$ dan $x_{n+1}=\frac{(-1)^{(n+1)-1}x^{2(n+1)-2}}{(2(n+1)-2)!}=\frac{x^{2n}}{(2n)!}$. Sehingga,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{x^{2n}}{(2n)!}}{\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^2}{(2n)(2n-1)}\right)=0$$

untuk semua nilai x. Jadi, deret pangkat (2.7.5) konvergen pada interval $-\infty<x<\infty$.

Pada kasus 2 dan 3, himpunan nilai x yang mana deret pangkatnya konvergen dinamakan interval konvergensi dari deret tersebut. Pada kasus 2, sebagai contoh, jika suatu deret konvergen untuk $x=x_0\pm R$, maka interval konvergensinya adalah $x_0-R\le x\le x_0+R$. Di sisi lain, jika deret itu konvergen hanya untuk $x=x_0+R$ tetapi tidak konvergen untuk $x=x_0-R$, maka interval konvergensinya adalah $x_0-R<x\le x_0+R$, dan seterusnya. Pada kasus 3, interval konvergensinya adalah keseluruhan bilangan real.