MATEMATIKA

EKONOMI DAN BISNIS

Ranti Kurniasih

Ranti Kurniasih

MATEMATIKA EKONOMI DAN BISNIS

Penerbit : Unmuh Ponorogo Press

MATEMATIKA EKONOMI DAN BISNIS

Matematika Ekonomi dan Bisnis

Penulis :
Ranti Kurniasih

Hak Terbit © 2018, Penerbit : Unmuh Ponorogo Press
Jalan Budi Utomo Nomor 10 Ponorogo-63471
Telp. (0352) 481124, 487662
Faks. (0352) 461796
E-mail : unmuhpress@umpo.ac.id

Desain Sampul: Tim Unmuh Ponorogo Press

ISBN 978-602-0815-86-2

Cetakan Pertama, Juli 2018

Perpustakaan Nasional : Katalog Dalam Terbitan (KDT)
109 halaman, 15,5 x 23 cm

KATA PENGANTAR

Matematika Ekonomi dan Bisnis ini merupakan buku ajar bagi mahasiswa semester pertama Fakultas Ekonomi. Buku ajar ini terdiri dari 7 bab yang merupakan konsep dasar matematika dan penerapannya dalam permasalahan ekonomi dan bisnis, yaitu (1). Himpunan, (2). Fungsi, (3) Penerapan Fungsi, (4). Barisan dan Deret, (5). Penerapan Barisan dan Deret, (6) Diferensial Fungsi Sederhana, (7) Penerapan Diferensial Fungsi.

Setiap bab, terdiri dari pendahuluan, materi pokok, ringkasan, dan soal latihan. Pembahasan setiap materi diikuti dengan contoh soal serta penyelesaiannya agar memudahkan mahasiswa dalam memahami konsep matematika dan menerapkannya dalam permasalahan ekonomi dan bisnis.

Ponorogo, 11 Juli 2018

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I
HIMPUNAN

KEMAMPUAN AKHIR YANG DIRENCANAKAN :
Mahasiswa mampu menjelaskan dan memahami konsep himpunan serta menyelesaikan permasalahannya

INDIKATOR

1.1 Menjelaskan pengertian himpunan
1.2 Menyajikan Himpunan
1.3 Menjelaskan Himpunan Universal dan Himpunan Kosong
1.4 Menyelesaikan Operasi Himpunan
1.5 Menerapkan kaidah-kaidah Matematika dalam pengoperasian himpunan

A. Pendahuluan

Dalam segala bidang kehidupan sehari-hari kita tidak pernah terlepas dari pembelajaran matematika. Khususnya dalam permasalahan konsep himpunan yang tdak pernah kita sadari kebermanfaatannya. Di masyarakat, banyak kita temui macam macam perkumpulan seperti, Himpunan Mahasiswa Jurusan (HMJ), Himpunan Mahasiswa Islam (HMI), Himpunan Kerukunan Tani Indonesia (HKTI), dan masih banyak lagi himpunan masyarakat dan pemuda yang sudah menjamur. Tidak berhenti sampai di sini, anak-anak kecilpun sudah pandai menerapkan teori himpunan dengan mengelompokkan mainan-mainan sejenis yang mereka miliki. Konon, teori himpunan bersifat sangat mendasar dalam pembelajaran matematika yang mendasari hampir semua cabang ilmu hitung modern. Berdasarkan sifat mendasarnya tersebut, maka pada bagian awal buku ini akan dibahas terkait hal-hal yang berhubungan dengan teori himpunan (*set theory*).

B. Pengertian dan Notasi Himpunan

Himpunan adalah kumpulan obyek obyek yang cenderung memiliki sifat dan karakter yang sama. Objek-objek yang mengisi atau membentuk himpunan disebut **anggota** himpunan atau **elemen** himpunan atau **unsur** himpunan. Objek-objek suatu himpunan sangat bervariasi tergantung pada induk himpunannya, misalkan himpunan Kota yang berawalan huruf B, maka unsur-unsurnya antara lain Bogor, Bandung, Blitar, Bondowoso, dan lain sebagainya. Biasanya untuk menotasikan suatu himpunan digunakan huruf besar, seperti A, B, S, P, Q dan lain lain, sedangkan pemakaian huruf kecil seperti a, b, c, x, dan y melambangkan notasi untuk objek-objek suatu himpunan. Sebagai contoh notasi $p \in A$ berarti bahwa objek p adalah unsur atau anggota dari himpunan A. Andaikan p bukan elemen dari A, maka dinotasikan sebagai $p \notin A$.

Andaikan semua unsur himpunan R juga merupakan unsur himpunan S, maka dapat dikatakan bahwa R himpunan bagian (*subset*) himpunan S, dan dinotasikan dengan $R \subset S$. Sebagai contoh R adalah himpunan nama bulan berawalan J, dan S merupakan himpunan nama 12 bulan dalam setahun. Apabila kedua himpunan dinyatakan dengan cara daftar, maka

R = { Januari, Juni, Juli}

S = { Januari, Februari, Maret, April,..., Desember}

Dari keterangan di atas, maka dapat ditarik kesimpulan bahwa $R \subset S$ artinya r himpunan bagian S.

Dua himpunan dikatakan sama jika semua anggota dari dua atau lebih himpunan memiliki jumlah unsur dan jenis anggota yang sama. Misalkan himpunan P beranggotakan x,y,z sedangkan Q memiliki unsur y,z,x, maka dikatakan kedua himpunan tersebut sama. Dinotasikan sebagai P=Q (P dan Q saling subset). Ingkaran dari dua himpunan yang sama dapat dinotasikan dengan P≠Q yang menunjukkan ingkaran dari P=Q.

Penyajian sebuah himpunan dapat dituliskan dalam dua cara, yaitu cara mendaftar dan cara kaidah notasi. Cara mendaftar adalah dengan mencantumkan seluruh objek yang menjadi anggota suatu himpunan.

Contoh 1.1

A={2,3,5,7,11}, yang artinya himpunan A adalah himpunan 5 bilangan prima yang pertama.

Cara kaidah notasi adalah dengan menyebutkan karakteristik tertentu dari objek-objek yang menjadi anggota suatu himpunan.

Contoh 1.2

A={x; x adalah 5 bilangan prima yang pertama}, yang berarti himpuan A beranggotakan x, di mana x adalah 5 bilangan prima yang pertama.

C. Himpunan Universal dan Himpunan Kosong

Himpunan universal bisa disebut sebagai himpunan induk dari setiap himpunan. Himpunan universal biasa dinotasikan dengan U. Himpunan universal biasa disebut himpunan saja. Sedangkan himpunan yang tidak memiliki anggota disebut dengan himpunan kosong dilambangkan notasi { } atau ∅. Secara teori, himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari setiap himpunan apapun.

Berdasarkan konsep di atas, himpunan universal merupakan induk setiap himpunan, dan himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari setiap himpunana, maka terhadap suatu himpunan tertentu (misalkan A), berlaku ketentuan : $\emptyset \subset A \subset U$. Agar lebih memahami konsep di atas, berikut disajikan contoh soal.

Contoh 1.3

U = {-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5}

P = {-4,-2,0,2,4}

Q = {-2,-1,0,1,,2}

Kesimpulan yang dapat diambil dari data di atas

$P \subset U$,	$4 \in P$
$Q \subset U$,	$5 \notin Q$
$\phi \subset Q \subset U$	$P \neq Q$

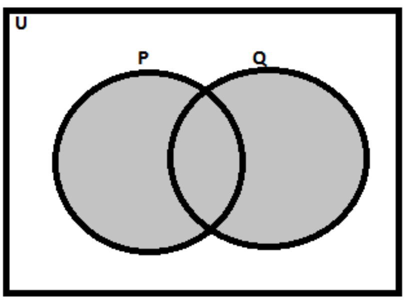
D. Operasi Himpunan

Sebagaimama pada bilangan, terhadap dua buah himpunan atau lebih dapat dilakukan 4 operasi himpunan sebagai berikut ;

a. Gabungan dua buah himpunan (*union*) dari himpunan P dan himpunan Q, yaitu himpunan yang beranggotakan objek-objek dari himpunan P atau objek-objek himpunan Q, dinotasikan dengan $P \cup Q$.

$$P \cup Q = \{a; a \in P \text{ atau } a \in Q\} \qquad (1.1)$$

Jika disajikan dalam diagram venn sebagai berikut :

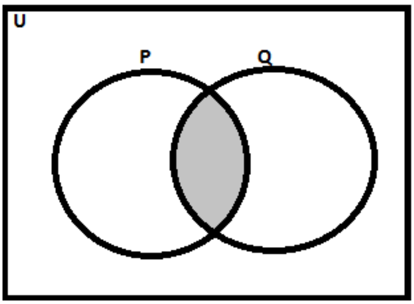


Gambar 1.1. $P \cup Q$

b. Irisan dua buah himpunan (*intersection*) dari himpunan P dan himpunan Q, yaitu himpunan yang beranggotakan objek-objek dari himpunan P dan objek-objek himpunan Q, dinotasikan dengan P $\cap Q$.

$P \cap Q = \{a; a \in A \; dan \; a \in B\}$ (1.2)

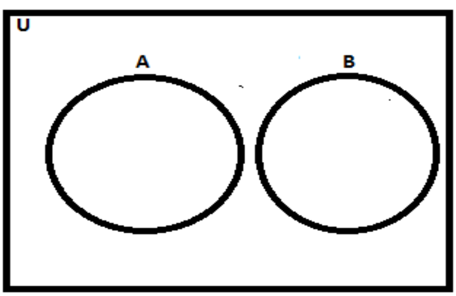
Jika disajikan dalam diagram venn sebagai berikut :



Gambar 1.2. $A \cap B$

Jika $A \cap B = \phi$, yang berarti tidak ada satupun anggota yang sama dari kedua himpunan tersebut, maka dikatakan kedua himpunan tersebut disjoin (saling lepas).

Jika disajikan dalam diagram venn sebagai berikut :

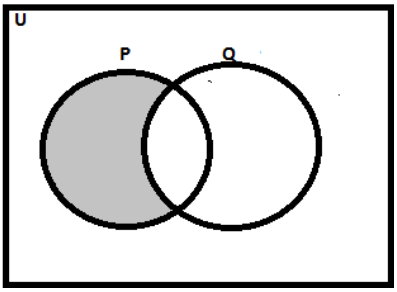


Gambar 1.3. $A \cap B = \phi$

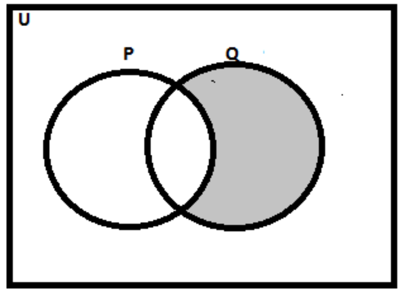
c. Selisih dari dua himpunan, misalkan himpunan P dan himpunan Q, yaitu himpunan yang beranggotakan unsur-unsur himpunan P dan ***bukan*** termasuk unsur dari himpunan Q. Dinotasikan dengan P – Q

$$P-Q=\{x;x\in P \; tetapi \; x\notin Q\}$$
$$Q-P=\{x;x\in P \; tetapi \; x\in Q\} \quad . \qquad (1.3)$$

Jika disajikan dalam diagram venn sebagai berikut :



Gambar 1.4. P – Q

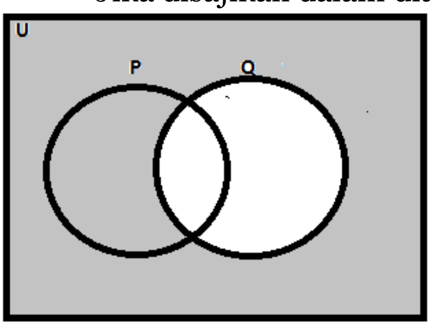


Gambar 1.5. Q – P

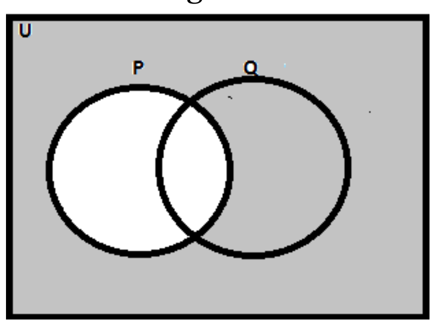
d. Pelengkap (complement) dari sebuah himpunan P, yaitu himpunan yang beranggotakan objek-objek yang tidak dimiliki oleh himpunan P, tetapi merupakan anggota dari himpunan universal. Pelengkap dari himpunan P dinotasikan dengan P^c.

$$P^c=\{x;x\in U \text{ tetapi } x\notin P=U-P\}$$
$$Q^c=\{x;x\in U \text{ tetapi } x\notin Q=U-Q\} \qquad (1.4)$$

Jika disajikan dalam diagram venn sebagai berikut :



Gambar 1.6. Q^c



Gambar 1.7. P^c

Contoh 1.4

Diketahui himpunan-himpunan sebagai berikut :

U adalah himpunan semua kota di Jawa Timur yang berawalan huruf S

P = {Surabaya, Malang}

Q = {Tulungagung, Trenggalek, Surabaya, Ponorogo}

R = {Madiun, Pacitan, Banyuwangi}

Maka akan diperoleh;

$$P \cup Q = \{Surabaya, Malang, Tulungagung, Treanggalek, Ponorogo\}$$

$$P \cup R = \{Surabaya, Malang, Madiun, Paci\tan, Banyuwangi\}$$

$$Q \cup R = \{Tulungagung, Trengaalek, Surabaya, Ponorogo, Madiun, Paci$$

$$P \cap Q = \{Surabaya\}$$

$$P \cap R = \phi$$

$$P - Q = \{Malang\}$$

$$Q - P = \{Tulungagung, Trenggalek, Ponorogo\}$$

$$Q - R = \{Tulungagung, Trenggalek, Surabaya, Ponorogo\}\}$$

E. Kaidah – Kaidah Matematika dalam Operasi Himpunan

Kaidah-kaidah Matematika dalam Operasi Himpunan
Kaidah Idempoten a. $P \cap P = P$ b. $P \cup P = P$
Kaidah Asosiatif a. $(P \cap Q) \cap R = P \cap (Q \cap R)$ b. $(Q \cup R) \cup P = Q \cup (R \cup P)$

Kaidah Komutatif a. $P \cap Q = Q \cap P$ b. $Q \cup P = P \cup Q$
Kaidah Distributif a. $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$ b. b. $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$
Kaidah Identitas $a. \phi \bigcup P = P$ $c. U \cup P = U$ $b. \phi \cap P = \phi$ $d. U \cap P = A$
Kaidah Kelengkapan $a. P \cup P^c = U$ $c. P \cap P^c = \phi$ $b. (P^c)^C = P$ $d. \mathrm{U}^c = \phi$
De Morgan's Law a. $(P \cup Q)^c = P^c \cap Q^c$ b. $(Q \cap P)^c = Q^c \cup P^c$

F. Ringkasan

Himpunan merupakan salah satu konsep dalam matematikayang sangat mendasar dan dapat dikatakan sebagai induk dalam cabang matematika yang lain. Dalam ilmu matematika, suatu himpunan adalah kumpulan objek-objek yang memiliki kecendrungan dan ciri yang sama. Terdapat beberapa cara dalam menuliskan suatu himpunan, yaitu dengan cara mendaftar anggota-anggotanya, dengan definisi, dan dengan kaidah notasi.

Himpunan universal adalah himpunan khusus yang merupkan induk dari setiap himpunan. Sedangkan himpunan khusus lainnya adalah himpunan kosong yang tidak memiliki anggota dan merupakan himpunan bagian dari setiap himpunan. Hubungan antar dua atau lebih himpunan dapat menimbulkan adanya operasi himpunan, yaitu Gabungan (*union*), Irisan (*intersection),* Selisih , dan Komplemen (*complement*). Untuk menunjukkan adanya hubungan antara dua atau lebih himpunan, akan sangat mudah jika dituliskan dalam diagram venn.

G. Soal latihan

1. Dengan menggunakan konsep operasi himpunan, tentukan hubungan antara himpunan bilangan asli, himpunan bilangan bulat, himpunan bilangan prima, dan himpunan bilangan ganjil !
2. Diketahui himpunan-himpunan sebagai berikut :
   U = {-5, -4,-3,-2, -1,..., 10}
   A adalah himpunan bilangan bulat negatif
   B adalah himpunan bilangan bulat kurang dari 5
   C adalah himpunan bilangan asli kurang dari 10
   Selesaikan operasi di bawah ini dan gambarkan diagram venn-nya!

   $a.\ A \cap B^c$ $\qquad d.\ A \cup B$

   $b.\ A^c \cap C$ $\qquad e.\ A \cup B \cup C$

   $c.\ B \cap C$ $\qquad f.\ A \cap B \cap C$

$g. (A \cup C) \cap B$

$h. A^c \cap B^c \cap C$

$i. A \cap B^c \cup C$

3. Diketahui himpunan-himpunan berikut:
   U = {x; $2 \leq x < 12$}
   A = {2, 4, 5, 6, 7, 9, 11}
   B = {4,5,11}
   Selesaiakan operasi berikut dengan menggambarkan diagram venn-nya!

   $a. A \cup B^c$

   $b. B - A$

   $c. U \cap A$

   d. $U \cap B^c$

   e. $U \cap (A \cap B)^c$

   f. $U - (A \cap B)$

4. Berdasarkan kaidah-kaidah operasi pada himpunan, sederhanakan pernyataan-pernyataan berikut :

   $a. B^c \cup (B \cap A)$

   b. $A \cup (A^c \cap B)$

5. Andaikan terdapat himpunan universal U. Sedangkan A, B, C, dan D adalah suatu himpunan tertetu. Tentukan nilai (benar/salah) dari tiap pernnyataan – pernyataan di bawah ini sesuai kaidah-kaidah matematika pada operasi himpunan !

   $a. A^c \cup A = U$

   b. $A^c \cap A = A$

   c. $B \cap U = B$

   d. $U \cup B = U$

   e. $(B)^c = U$

   f. $U \cup (A - C) = A - C$

   g. $B \cap (B - D) = B \cup D$

   h. $(A \cup B) - D = A - D$

BAB II
FUNGSI

KEMAMPUAN AKHIR YANG DIHARAPKAN

Memahami dan Mengidentifikasi Konsep Fungsi

INDIKATOR

2.1 Menjelaskan Pengertian Fungsi

2.2 Menjelaskan dan Mengidentifikasi Fungs Linear

2.3 Menjelaskan dan Mengidentifikasifungsi Non Linear (Fungsi Kuadrat)

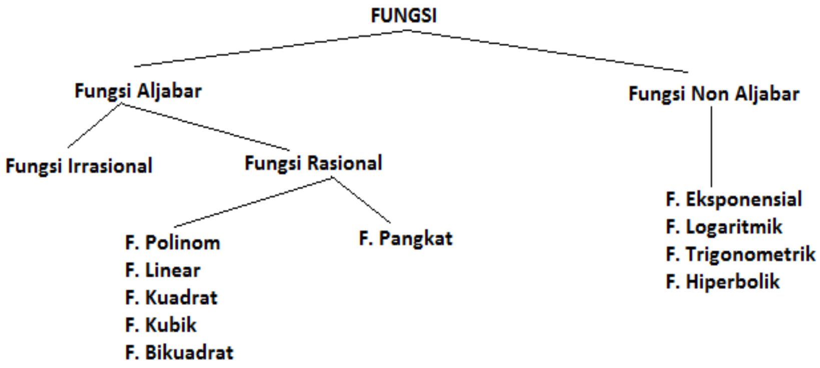
A. Pendahuluan

Penerapan fungsi dalam kehidupan ekonomi dan bisnis sangatlah penting dipelajari di perguruan tinggi. Hal ini disebabkan berbagai model permasalahan ekonomi dan bisnis banyak dinyatakan dengan fungsi. Selain itu, konsep fungsi sangat penting dipelajari sebagai dasar konsep-konsep matematika dalam bab selanjutnya.

Secara matematis, fungsi merupakan hubungan antara dua buah himpunan data. Misalnya, himpunan data besarnya pendapatan nasional dengan data tingkat konsumsi masyarakat. Jika kita misalkan kedua data dalam variabel yang berbeda, maka fungsi merupakan hubungan 2 buah variabel. Fungsi yang dalam hal ini memiliki satu variabel bebas. Namun, pada hakikatnya konsep fungsi lebih luas menyangkut dua atau lebih varabel bebas.

Beberapa macam fungsi yang sering digunakan dalam permasalahan ekonomi dan bisnis diantaranya;

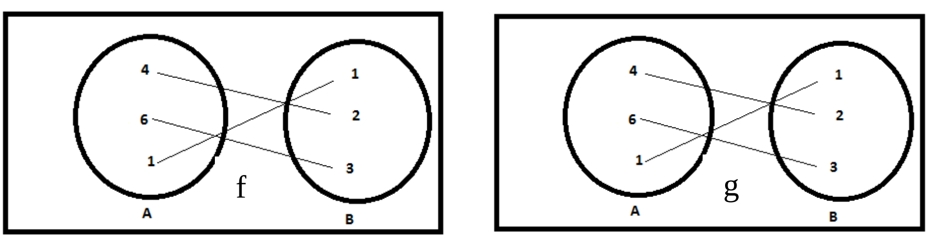
fungsi linier, fungsi nonlinier (kuadrat, kubik, logaritma, dan eksponen). Namun, bab ini hanya membahas terkait fungsi linier dan nonlinier khususnya fungsi kuadrat saja. Pembagian fungsi secara mendasar dapat dilihat pada bagan di bawah ini



Gambar 2.1 Bagan Pembagian Fungsi

B. Definisi fungsi

Fungsi adalah suatu relasi dari dua himpunan yang memasangkan tiap unsur himpunan pertama dengan tepat satu unsur himpunan kedua. Sebagai ilustrasi dapat digambarkan dalam sebuah digram venn sebagai berikut :



Gambar 2.2 Contoh Fungsi

Misalkan g suatu fungsi yang memetakkan setiap unsur himpunan A ke himpunan B
($g : A \rightarrow B$), maka :

i. Daeral asal (*domain*) fungsi ***g*** ditunjukkan oleh himpunan A
ii. Daeral kawan (ko*domain*) fungsi ***g*** ditunjukkan oleh himpunan B
iii. Daerah hasil (*range*) dari fungsi ***g*** adalah setiap unsur himpunan B yang dipasangkan dengan setiap unsur himpunan A.

Dalam bab ini akan dibahas terkait fungsi rasional yang terdiri dari fungsi polinom dan turunannya. Dinamakan fungsi polinom karena memiliki banyak suku pada variavel bebasnya. Fungsi polinom memiliki bentuk umum $f(x) = y = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n$. Derajat pada fungsi polinom dicerminkan oleh pangkat tertinggi pada variabel bebas fungsi polinom. Misalkan $f(x) = y = a_0+a_1x+a_2x^2$ merupakan fungsi polinom berderajat dua yang artinya fungs tersebut adalah fungsi kuadrat.

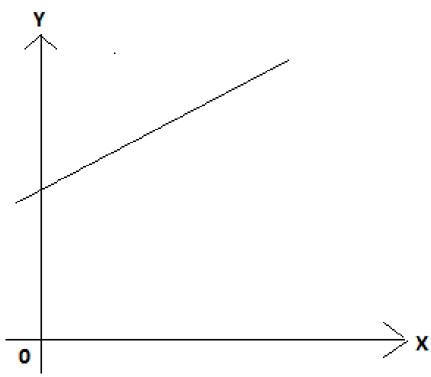
C. Fungsi linear

Fungsi Linear adalah fungsi turunan dari fungsi polinom yang memiliki derajat tertinggi variabel bebasnya pangkat satu, sehingga sering disebut polinom berderajat satu. Bentuk umum fungsi linear yaitu $f(x)=y=a_0+a_1x$, dengan a_0 adalah konstanta dan merupakan titk potong garis pada sumbu y, $a_1 \neq 0$ dan a_1 merupakan slop atau kemiringan garis dari fungsi linear. Kemiringan garis/slope dari fungsi linear dengan satu variabel merupakan perbandingan dalam variabel terikat (y) dengan variabel bebas (x) yang biasanya dilambangkan dengan *m*. Jadi kemiringan suatu garis lurus/fungsi linear dapat dirumuskan dengan:

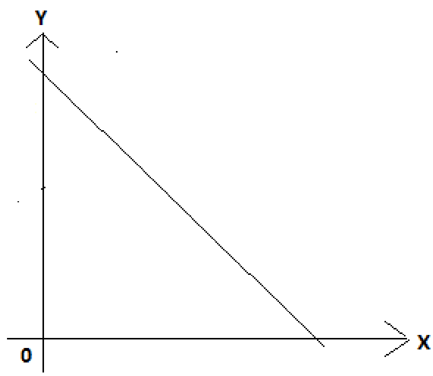
$$m = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \; atau \; \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \qquad (2.1)$$

Contoh 2.1

Y = 5 – 3x, maka kemirngan garisnya adalah m = -3. Artinya setiap kenaikan satu unit variabel X akan menurunkan 3 unit varabel Y. Selanjutnya, setiap penurunan variabel X akan menakkan unit variabel Y.

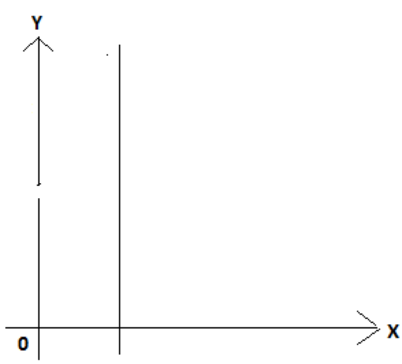


Gambar 2.2 Kemiringan Positif

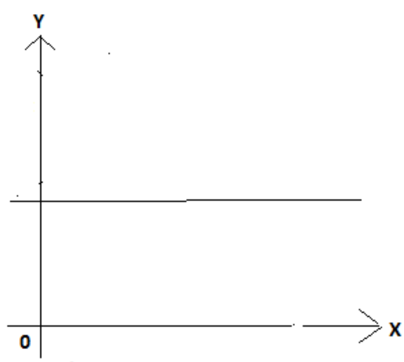


Gambar 2.3 Kemiringan Negatif

Beberapa macam kemrngan garis lurus yang dibentuk oleh fungsi linear:



Gambar 2.4 Kemiringan tak hingga



Gambar 2.5 Kemiringan nol

Pada gambar 2.2 grafik memiliki kemiringan positif, karena garis ditarik dari kiri bawah ke kanan atas (arah positif). Gambar 2.3 grafik memiliki kemiringan negatif, karena ditarik dari kanan bawah ke kiri atas (arah negatif). Gambar 2.4 grafik memilk kemiringan tak hingga karena X konstan, sedangkan Y tak tentu/tak hingga. Gambar 2.5 merupakan grafik yang memiliki kemiringan nol, karena Y konstan, dan X selalu bertambah.

2.2.1 Penggambaran Grafik Fungsi Linear

Grafik fungsi linear dapat disajikan dalam bidang sumbu koordinat cartesius dan berupa garis lurus. Untuk menggambar suatu grafik fungsi linier dapat dilakukan dengan menghitung nilai koordinat titik-titik yang memenuhi persamaan/fungsinya, selanjutnya memindahkan pasangan – pasangan titik tersebut ke dalam bidang koordinat cartesius. Kemudian, untuk membuat grafiknya dengan menghubungkan titik-titik tersebut sesuai tempatnya dengan meletakkan ***absis*** pada sumbu horisontal, dan ***ordinat*** pada sumbu vertikal. Sesuai dengan namanya, grafik fungsi linear berupa garis lurus.

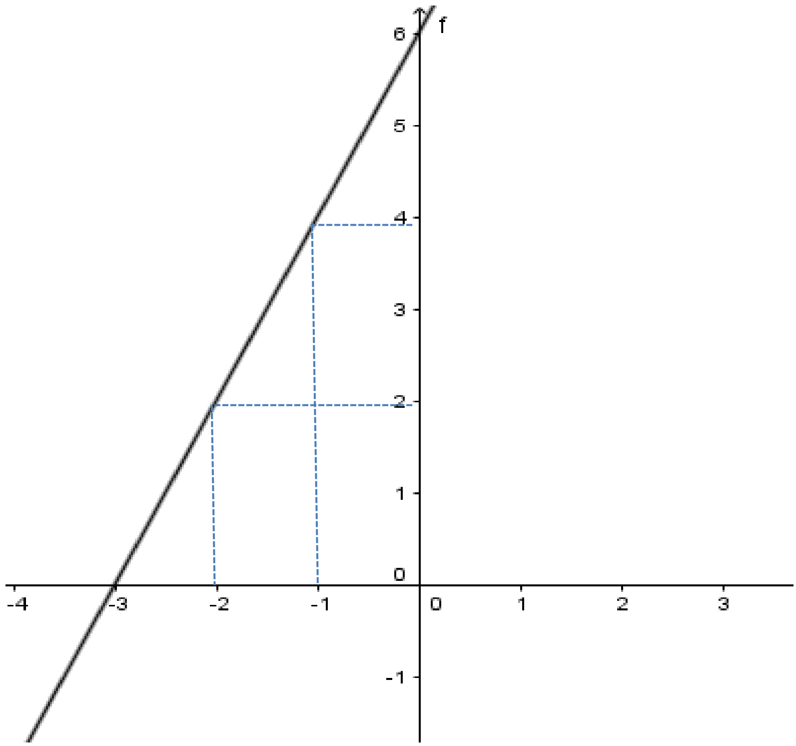
Contoh 2.2

1. f(x) = y = 2x+6

X	0	-1	-2	-3
Y	6	4	2	0

2. f(x) = y = -3x

x	-2	-1	0	1	2
y	6	3	0	-3	-6



Gambar 2.6 grafik y = 2x+6

Dengan memilih beberapa nilai untuk variabel bebas a, lalu disubstitusikan ke persamaan fungsinya, maka akan didapat nilai-nilai untuk variabel terikat y sebagaimana dicontohkan dalam kolom-kolom contoh di atas. Berdasarkan nilai (x,y) yang didapat selanjutnya ditentukan koordinat titik-titik pada bidang koordinat. Garis dari persamaan dapat digambarkan dengan menghubungkan koordinat atau pasangan titik-titik tersebut.

Pada persamaan linier y = a + bx, konstanta ***a*** merupakan titik potong (***intercept***) garis sumbu vertical y, koefisien ***b*** merupakan **kemiringan garis** atau ***slope*** atau ***gradient*** garisnya. Saat a = 0, maka dikatakan fungsi tidak memiliki titik potong terhadap sumbu y, yang menyatakan bahwa garis dari fungsi tersebut bermula dari titik pangkalnya (0,0).

Letak grafik dari fungsi linear tergantung terhadap nilai – nilai dari variabel x yang kita pilih dan besarnya nilai y. Sehingga, letak grafik fungsi linier bisa berada di kuadran I, II, III, maupun IV.

Penentuan nilai dari variabel x yang kita pilih tidak disarankan untuk terlalu banyak, mengingat dengan dua buah titik saja dapat dibentuk sebuah garis yang sudah menggambarkan grafik dari fungsi. Dapat juga menggunakan titik potong dan gradient dalam menggambarkan grafik fungsi linear.

2.2.2 Menentukan Persamaan Linear

Persamaan linear dapat ditentukan dengan beberapa cara:

(1). Metode Dua Titik

Suatu fungsi linear yang berupa garis lurus dapat dgambarkan dengan menghubungkan dua buah titik pada bidang koordinat cartesius. Namun, persamaan garis lurus tidak dapat diketahui jika tidak mengetahui letak kedua titik dalam bidang koordinat cartesius. Sehingga kita perlu mengetahui dua buah titik untuk menentukan persamaan garis lurus.

Jika diketahui dua titik A (X_1,Y_1) dan B (X_2, Y_2), maka kemiringan garis lurusnya m = $\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$. Jika terdapat sebuah titik pada garis tersebut, misalkan R (X,Y), maka keemiringannya m = $\frac{Y - Y_1}{X - X_1}$. Dalam sebuah grafik garis lurus, setiap titiknya memiliki kemiringan yang sama, sehingga persamaan garis lurusnya dapat dirumuskan dengan

$$\frac{Y - Y_1}{X - X_1} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \qquad (2.2)$$

Contoh 2.3

Diketahui dua buah titik A(-2,3) dan B(6,4), tetukan persamaan garis yang dilalui dua garis tersebut!

Jawab

Misalkan $X_1 = -2$, $Y_1 = 3$, $X_2 = 6$, dan $Y_2 = 4$

Persamaan garis lurus yang terbentuk adalah

$$\frac{Y - Y_1}{X - X_1} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

$$\frac{Y - 3}{X + 2} = \frac{4 - 3}{6 - 2}$$

$$\frac{Y - 3}{X + 2} = \frac{1}{4}$$

$$4(Y - 3) = 1(X + 2)$$

$$4Y - 12 = X + 2$$

$$4Y = X + 14$$

$$Y = 0{,}25X + 3{,}5$$

(2). Metode Satu Titik dan Satu Slope

Untuk menentukan persamaan garis lurus dapat pula digunakan satu titik dan satu slope/kemiringan. Metode ini dapat diturunkan dari persamaan 2.2. Perhatikan rumus

$$\frac{Y - Y_1}{X - X_1} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

Misalkan $(X-X_1)$ dipindahkan ke ruas kanan, sehingga menjadi

$Y - Y_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}(X-X_1)$, di mana $\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = m$

$$Y - Y_1 = m\,(X-X_1) \qquad (2.3)$$

Persamaan 2.3 merupakan cara untuk menetukan persamaan garis jika diketahui 1 titik dan 1 kemiringan garis (m).

Contoh 2.4

Diketahui sebuah titik koordinat A(-2,3) dan kemiringan garis = - 3. Tentukan persamaan garisnya dan gambarkan kurvanya.

Jawab

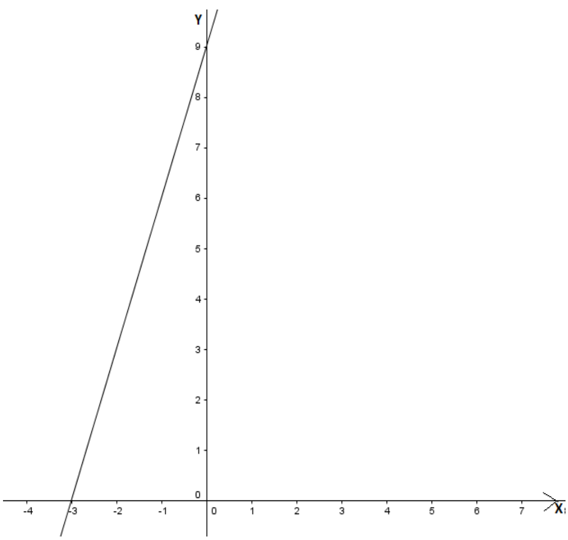
Persamaan garis yang terbentuk apabila diketahui sebuah titik A(-2,3) dan m=3 adalah

$y - y_1 = m\ (x-x_1)$

$y - 3 = 3\ (x-(-2))$

$y - 3 = 3\ (x+2)$

$y - 3 = 3x + 6$



Gambar 2.8 kurva persamaan garis y = 3x +9

2.2.3 Hubungan Dua Buah Garis Lurus

Ada beberapa kemungkinan yeng terjadi pada hubungan dua buah garis lurus yang digambarkan dalam satu bidang kartesius. Terdapat 4 hubungan yang mungkin terjadi dari dua buah garis lurus;

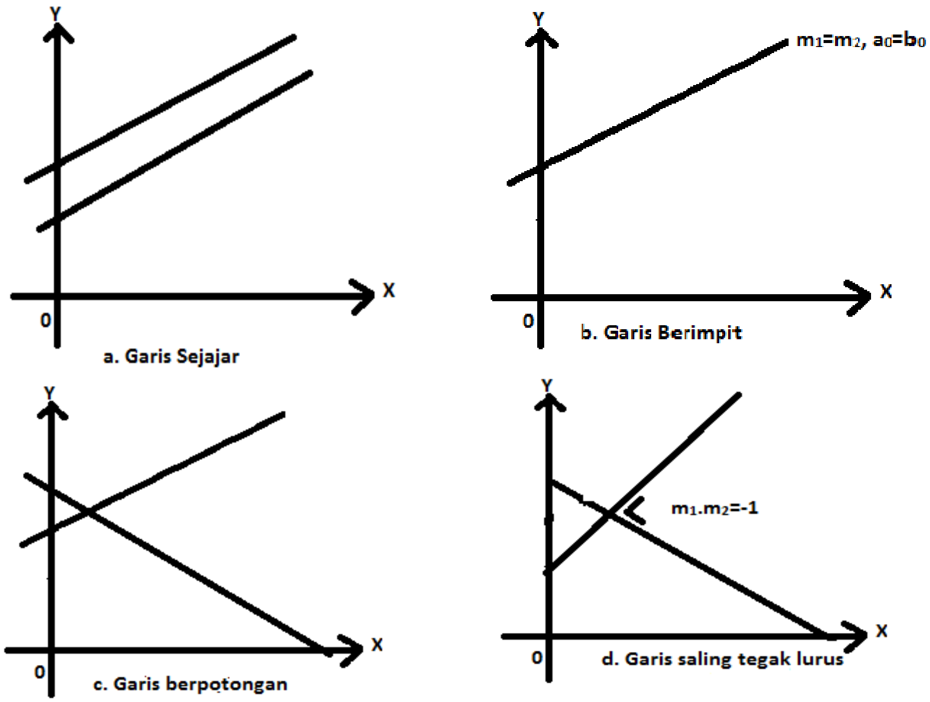
(1). Dua garis lurus yang saling sejajar, yaitu dua buah garis lurus yang memiliki kemiringan sama ($m_1 = m_2$). Misalkan y=3x+9 dan y=3x-5

(2). Dua garis lurus yang saling berimpit, yaitu dua buah garis yang memiliki kemiringan sama (m_1 = m2) dan titik potong (*intercept*) terhadap sumbu y juga sama. Misalkan y = 2x – 4 dan 2y = 4x – 8

(3). Dua buah garis yang kemiringan garisnya berbeda ($m_1 \neq m_2$), maka hubungan kedua grafiknya saling berpotongan. Misalkan y = 3x +9, dan y = -x – 6

4). Dua buah garis yang memiliki kemiringan saling berkebalikan dan berlawanan tanda ($m_1.m_2 = -1$), memiliki hubungan grafik yang berpotongan tegak lurus. Misalkan y = 2x +4, dan 2y = -x +3

Keempat hubungan 2 garis lurus di atas, dapat diperlihatkan dalam gambar(2.9) berikut:



Gambar 2.9 Empat Hubungan Dua Garis Lurus

D. Fungsi Non Linier (Fungsi Kuadrat)

Fungsi nonlinier merupakan fungsi yang berderajat lebih dari satu, termasuk diantaranya adalah fungsi kuadrat, fungsi kubik, fungsi bikuadrat, dan seterusnya. Grafik fungsi nonlinear berupa garis lengkung yang bisa berupa parabola (fungsi kuadrat), elips, hiperbola, lingkaran, dan fungsi kubik. Subbab ini akan dijelaskan lebih mendalam tentang fungsi nonlinear terutama fungsi kuadrat.

Fungsi Kuadrat atau fungsi berderajat dua adalah fungsi turunan dari fungsi polinom yang memiliki derajat tertinggi dari variabel bebasnya adalah dua. Bentuk umum fungsi kuadrat yaitu, $f(x) = y = c + bx + ax^2$, di mana c adalah konstanta, sedangkan b, dan a adalah koefisien, dan $a \neq 0$.

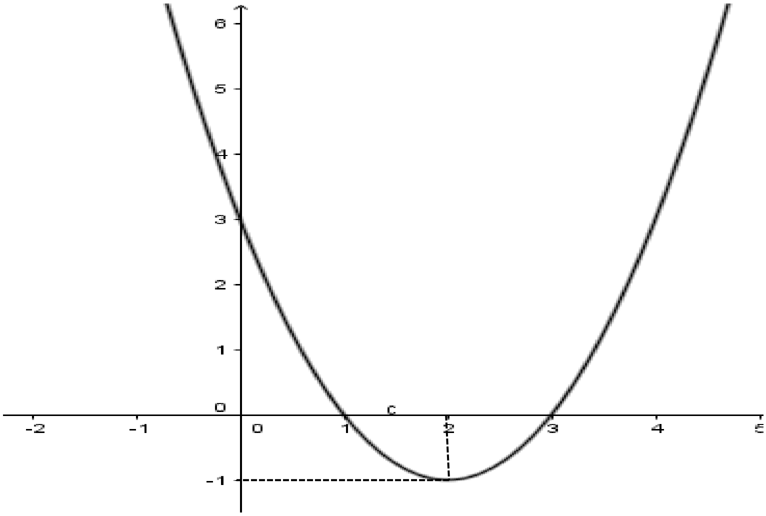
2.3.1 Penggambaran Fungsi Kuadrat

Penggambaran grafik fungsi nonlinear tidak semudah menggambar grafik fungsi linear. Secara umum prinsipnya sama, yaitu dengan memilih beberapa titik koordinat yang memenuhi fungsi tersebut lalu menghubungkan titik titik koordinat itu menjadi grafik nonlinear. Grafik fungsi nonlinear jelas tidak lurus seperti fungsi linear, karena fungsi nonlinear membutuhkan lebih dari dua titik dalam menghubungkannya dan kurvanya memiliki ciri khas yang berbeda. Berikut ini contoh penggambaran fungsi kuadrat.

Contoh 2.5

Gambarkan kurva persamaam kuadrat $y = x^2 - 4x + 3$!

X	-2	-1	0	1	2	3
Y	11	8	3	0	-1	0



Gambar 2.10 kurva fungsi kudarat $y = 3 - 4x + x^2$

Grafik fungsi kuadrat memilki satu titik puncak yang merupakan titik arah perubahan grafik menaik atau menurun. Dengan kata lain, titik puncak menunjukkan bahwa parabola memiliki titik maksimum (parabola terbuka ke bawah) atau minimum (parabola terbuka ke atas). Pada gambar 2.9 menunjukkan parabola memiliki titik minimu, di mana kurvanya terbuka ke atas. Koordinat titik puncak suatu parabola dapat ditentukan dengan rumus;

$$\text{Titik puncak} = \left\{ -\frac{b}{2a}, \frac{-\left(b^2 - 4ac\right)}{4a} \right\} \qquad (2.4)$$

Suatu garis lurus yang melalui titik puncak parabola dan membagi parabola menjadi dua bagian yang sama disebut sebagai ***sumbu simetri***. Parabola memiliki sumbu simetri yang sejajar sumbu Y (parabola vertical) dan sejajar sumbu X (parabola horizontal).

2.3.2 Macam – Macam Parabola

Parabola yang terbentuk dari suatu persamaan nonlinier memiliki macam-macam bentuk. Untuk melihat bagaimana bentuk parabola, kita dapat mengamati nilai parameter **a** dan nilai dari diskriminan **D** (b^2-*4ac*). Berikut ini terdapat 6 kemungkinan dari jenis parabola.

a. Parabola terbuka ke atas dan memotong sumbu X di dua titik yang berlainan, jika **a>0 dan D>0.**

b. Parabola terbuka ke atas dan memotong sumbu X di satu titik , jika **a>0 dan D=0**.

c. Parabola terbuka ke atas dan tidak memotong ataupun menyinggung sumbu X, jika **a>0 dan D<0**, maka

d. Parabola terbuke ke bawah dan memotong sumbu X di dua titik yag berlainan, **jika a<0 dan D>0**

e. Parabola terbuka ke bawah dan memotong sumbu X di satu titik, jika **a<0 dan D=0**.

f. Parabola terbuka ke bawah dan tidak memotong ataupun menyinggung sumbu X, jika **a<0 dan D<0**

Contoh 2.6

Diketahui suatu fungsi kuadrat $y = x^2 - 8x + 15$. Tentukan titik puncak parabola dan gambarkan grafik fungsi kuadrat tersebut !

Jawab

$$\left\{-\frac{b}{2a},\frac{-\left(b^2-4ac\right)}{4a}\right\}$$

Titik puncak parabola = $\left\{-\frac{-8}{2(1)},\frac{-\left(64-4.1.15\right)}{4}\right\}$

$$\left\{\frac{8}{2},\frac{-4}{4}\right\}$$

$$\left\{4,-1\right\}$$

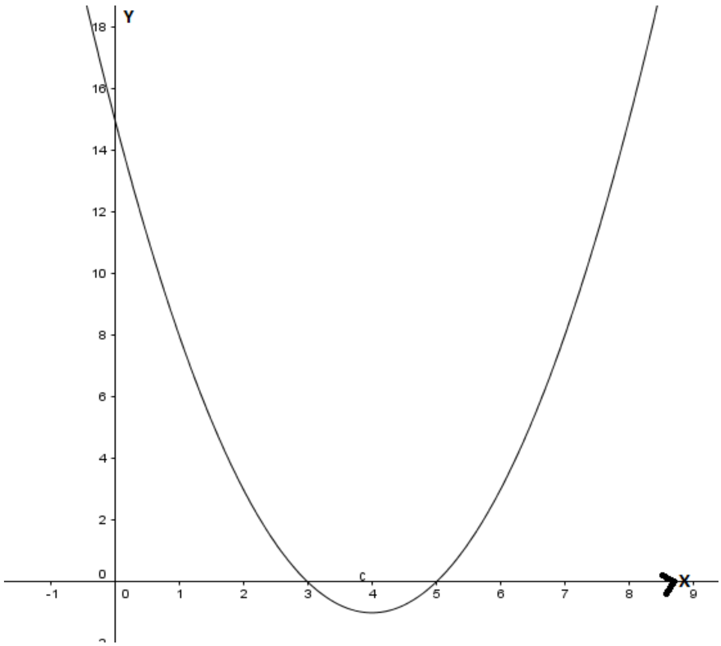
Dilihat dari nilai parameter a=1, maka parabola terbuka ke atas. Titik potong terhadap sumbu Y terjadi saat x = 0, yaitu di titik (0,15). Sedangkan titik potong terhadapsumbu X terjadi saat y = 0. Untuk menentukan titik potong terhadap sumbu X, dapat digunakan cara faktorisasi terhadap persamaan kuadrat tersebut, yaitu dengan memberi niai y =0 maka

$0 = x^2 - 8x + 15$

$0 = (x-5)(x-3)$

$X_1=5$ dan $X_2=3$

Titik potong grafik terhadap sumbuX adalah (3,0) dan (5,0)



Gambar 2.11 parabola fungsi kuadrat $y = x^2 - 8x + 15$

2.3.3 Membentuk Fungsi Kuadrat

Fungsi Kuadrat dapat disusun dengan cara melihat grafik atau dengan mengamati beberapa titik potong sumbu koordinat yang diketahui, yaitu :

a. Jika diketahui grafik fungsi kuadrat memotong sumbu X di $A(x_1,0)$ dan $B(x_2,0)$ serta melalui titik tertentu, maka fungsi kuadrat dapat dirumuskan dengan

   $y = f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ (2.5)

b. Jika diketahui grafik fungsi kuadrat menyinggung sumbu X di $A(x,0)$ serta melalui sebuah titik tertentu, maka fungsi kuadrat dapat dirumuskan dengan

   $y = f(x) = a(x-x_1)^2$ (2.6)

c. Jika grafik fungsi kuadrat melalui titik puncak (x_p,y_p) dan melalui sebuah titik, maka fungsi kuadrat dapat dirumuskan dengan
$y = f(x) = a(x - xp)^2 + y_p$ (2.7)
d. Jika grafik fungsi kuadrat melalui titik $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, dan $C(x_3,y_3)$, maka fungsi kudarat dapat ditentukan dengan rumus
$y = f(x) = ax^2 +bx +c$ (2.8)
(cara substitusi titik-titik a, b, dan c ke persamaan)

Contoh 2.7

Diketahui suatu parabola memotong sumbu X di titik A(-5,0) dan B(1,0) serta melalui titik (2,7). Tentukan persamaan fungsi kuadrat tersebut !

Jawab

Suatu grafik fungsi kuadrat memotong sumbu X di (-5,0) dan (1,0) serta melalui (2,7). Maka fungsi kuadrat yang terbentuk adalah $y = f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$. Terlebih dahulu tentukan nilai a dengan cara mensubstitusikan titik A, B, dan titik (2,7) ke rumus fungsi kuadrat.

$y = a(x-x_1)(x-x_2)$

$7 = a(2+5)(2-1)$

$7 = a(7)$

$1=a$

Substitusikan nilai a =1 ke persamaan, sehingga didapat

$y =1 (x+5)(x-1)$

$y = x^2+4x-5$

Jadi, fungsi kuadrat yang memotong sumbu X di A(-5,0) dan B(1,0) serta melalui titik (2,7) adalah $y = x^2+4x-5$.

Untuk menentukan penyelesaian (akar-akar) suatu persamaan kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ dapat dilakukan dengan beberapa cara, yaitu

a. Memfaktorkan,

b. Melengkapkan kuadrat sempurna
c. Menggunakan rumus kuadrat, dan
d. Menggambarkan sketsa grafik fungsi yang diketahui

Rumus fungsi kuadrat yang dimaksud pada bagian (c) adalah sebagai berikut

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Selanjutnya, kita juga dapat menentukan persamaan kuadrat dari akar-akar yang telah diketahui, yaitu dengan

a. Menggunakan perkalian factor

   $(x - x_1)(x - x_2) = f(x)$ (2.10)

   Jika diketahui x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat

b. $x^2 - (x_1+x_2)x + (x_1.x_2) = f(x)$ (2.11)

   Jika diketahui hasil kali dan jumlah akar-akar persamaan kuadrat

   di mana, $x_1 + x_2 = \frac{b}{a}$, dan $x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$

Contoh 2.8

Diketahui akar akar persamaan $x_1 = -2$, dan $x_2 = 5$. Tentukan persamaan kuadrat yang dapat dibentuk dari akar-akar persamaan kuadrat tersebut.

Jawab

Jika diketahui dua akar-akar persamaan kuadrat, maka persamaan kuadrat yang terbentuk adalah

$(x - x_1)(x - x_2) = 0$
$(x + 2)(x - 5) = 0$
$x^2 - 3x - 10 = f(x)$

E. Ringkasan

Permasalahan ekonomi dan bisnis sangat erat kaitannya dengan konsep fungsi. Hal ini disebabkan banyaknya model-model ekonomi dan bisnis yang dapat disederhanakan dan diselesaikan dengan konsep fungsi. Pada hakikatnya fungsi merupakan relasi khusus yang menghubungkan beberapa variabel. Jenis fungsi yang diterapkan dalam ekonomi dan bisnis diantaranya adalah, fungsi linear, fungsi kuadrat, fungsi kubik, fungsi logaritma, dan fungsi eksponen.

Fungsi linear merupakan fungsi polinon berderajat satu yang memiliki bentuk umum y = a+bx, dengan a adalah konstanta yang tidak boleh nol dan b adalah koefisien dari variabel x. Grafik fungsi linear berupa garis lurus yang memiliki kemiringan garis (m) dan titik potong terhadap sumbu X maupun sumbu Y.

Fungsi nonlinear khususnya adalah fungsi kuadrat merupakan turunan fungsi polinom berderajat dua yang memiliki bentuk umum $y = ax^2 + bx + c$, dengan $a \neq 0$. Grafik fungsi kuadrat berupa parabola yang terbuka ke atas, terbuka ke bawah, terbuka ke kanan, dan jugaterbuka ke kiri tergantung pada besar nilai parameter *a* dan diskriminan *D*.

F. Soal latihan

1. Jika diketahui suatu fungsi y = f(x) = x2 +7x +10, tentukan nilai dari:
   a. f(-3)
   b. f(0)
   c. f(2)
   d. f(5)
   e. f(7)

2. jika diketahui suatu fungsi $y = f(x) = \frac{x-12}{2x}$, tentukan nilai dari:
   a. f(-2)
   b. f(1)
   c. f(3)
   d. f(6)
   e. f(10)
3. Tentukan persamaan garis lurus yang terbentuk dari pasangan titik-titik berikut :
   a. A(-3,1) dan B(2,5)
   b. A(2,0) dan B(3,4)
   c. A(-2,-3) dan B(3,7)
   d. A(1,5) dan B(-2,6)
   e. A(2,-4) dan B(7,3)
4. Tentuka persamaan garis lurus yang terbentuk dari sebuah titik (A) dan kemiringan garis (m) berikut:
   a. A (1,0) dan m=2
   b. A (2,-5) dan m=1/2
   c. A (-4,-3) dan m=5
   d. A (0,5) dan m=-4
   e. A (7,6) dan m=3
5. Gambarkan grafik fungsi dari pasangan-pasangan fungsi berikut:
   a. 2x – 4y +6 =0 ; x – 2y -1 = 0
   b. 3x – y – 2 = 0 ; 6x – 2y – 4 =0
   c. x + 2y +10 = 0 ; 3x -6y +12 = 0
   d. 2x – 5y – 10 = 0 ; 5x +2y +20 = 0
   e. 4x – 2y + 8 = 0 ; 2x + 4y -10 = 0
6. Berikut ini beberapa fungsi kuadrat:
   a. $y = x^2 - 3x + 2$
   b. $y = x^2 - 4x + 4$
   c. $y = -5x^2 + 30x + 77$
   d. $y = -x^2 + 9$

e. $y = 6x^2 + x - 12$

Tentukan masing-masing fungsi tersebut :

- koordinat titik puncak
- selidiki apakah kurva terbuka ke atas atau ke bawah
- gambarkan kurvanya

7. Tentukan akar-akar persamaan kuadrat berikut :
   a. $y = x^2 - 7x + 10$
   b. $y = -x^2 + 5x + 6$
   c. $y = -x^2 + 6x - 2$
   d. $y = 2x^2 - 8x + 5$
   e. $y = x^2 - 4x - 32$
8. Tentukan persamaan kuadrat yang terbentuk jika diketahui titik puncak (2,8) dan melalui titik A(3,5).
9. Tentukan persamaan kuadrat yang terbentuk jika diketahui akar-akarnya $x_1 = 6$ dan $x_2 = -2$!

Diketahui persamaan kuadrat $2x^2 + 5x + 3 = 0$. Tentukan persamaan kuadrat baru yang memiliki akar-akar 2 kali akar-akar persamaan kuadrat semula !

BAB III

PENERAPAN FUNGSI

KEMAMPUAN AKHIR YANG DIHARAPKAN
Menerapkan konsep fungsi dalam permasalahan ekonomi dan bisnis
INDIKATOR
3.1 Menerapkan konsep fungsi dalam permasalahan fungsi permintaan
3.2 Menerapkan konsep fungsi dalam permasalahan fungsi penawaran
3.3 Menerapkan konsep fungsi dalam keseimbangan pasar
3.4 Menerapkan konsep fungsi linear dalam permasalan keseimbangan pasar 2 produk
3.5 Menerapkan konsep fungsi linear dalam pengaruh pajak spesifik terhadap KP
3.6 Menerapkan konsep fungsi linear dalam pengaruh pajak proporsional terhadap KP
3.7 Menerapkan konsep fungsi linear dalam pengaruh subsidi dalam KP
3.8 Menerapkan konsep fungsi linear dalam fungsi biaya dan fungsi penerimaan
3.9 Menerapkan konsep fungsi linear dalam analisis pulang pokok
3.10 Menerapkan konsep fungsi linear dalam fungsi konsumsi dan fungsi tabungan

A. Pendahuluan

Permasalahan ekonomi dan bisnis sangatlah kompleks dalam kehidupan sehari hari. Para ahli ekonomi sering menggunakan penerapan fungsi dalam penyelesaian permasalahan tersebut dengan cara membuatnya lebih sederhana dalam bentuk persamaan linear maupun nonlinear.

Dalam bab ini akan dibahas beberapa penerapan ekonomi dan bisnis yang berbentuk fungsi linear maupun nonlinear. Penerapan yang pertama akan membahas tentang fungsi permintaan dan fungsi penawaran. Selanjutnya, akan dibahas terkait keseimbangan pasar yang terdiri dari keseimbangan pasar satu macam barang dan keseimbangan dua macam barang. Penerapan selanjutnya terkait analisis perubahan keseimbangan pasar akibat adanya pajak dan subsidi dari pemerintah. Penerapan lainnya terkait analisis pulang pokok, fungsi penerimaan, fungsi konsumsi, dan fungsi tabungan.

B. Fungsi Permintaan

Fungsi terbentuk karena adanya hubungan antara dua variabel, yaitu varibael bebas dan variabel terikat. Dalam hal ini, hubungan berbanding terbalik antara variabel jumlah barang yang diminta (*Quantity*) dan variabel harga barang (*Price*) ditunjukan oleh **fungsi permintaan**. Jumlah barang (Quantity) merupakan variabel bebas yang besarnya tidak dipengaruhi oleh harga barang. Sedangkan harga barang (Price) merupakan variabel terikat yang besarnya bergantung terhadap banyaknya barang yang diminta konsumen. Dengan demikian, fungsi permintaan dapat dituliskan dalam bentuk

$Q_d = f(Px)$, (3.1)

Di mana Qd merupakan fungsi jumlah barang yang diminta Apabila persamaan (3.1) ditransformasikan ke dalam bentuk umum persamaan linear, maka bentuk umumnya menjadi,

$Q_{dx} = a - bP_x$ (3.2)

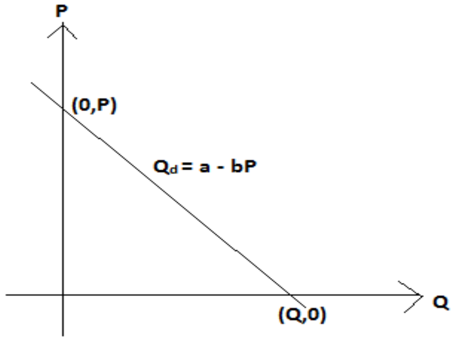
Di mana, P_x adalah harga produk X

Q_{dx} adalah jumlah permintaan produk X

a adalah konstanta

b adalah koefisien dari Px

Dalam persamaan (3.2), ***b*** bernilai negative karena sesuai dengan fungsi permintaan bahwa jika harga suatu produk turun, maka jumlah permintaan akan produk meningkat, begitu pula sebaliknya. Kurva fungsi permintaan berbentuk garis lurus yang memiliki kemiringan (*slope*) garis bernilai negative atau menurun, yaitu dari kiri atas ke kanan bawah. Penjelasan tersebut dapat dilihat pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Kurva Permintaan Linear

Contoh 3.1

Jika harga suatu produk Rp.1.500,00 maka akan terjual 100 unit dan jika harganya turun menjadi Rp. 1.000,00 maka akan terjual 200 unit. Tentukan persamaan fungsi permintaan dari permasalahan tersebut dan gambarkan kurvanya !

Jawab

Diketahui P1 = 1500, Q1 = 100; P2 = 1000, Q2 = 200

$$\frac{Q-Q_1}{Q_2-Q_1}=\frac{P-P_1}{P_2-P_1}$$

$$\frac{Q-100}{200-100}=\frac{P-1500}{1000-1500}$$

$$\frac{Q-100}{100}=\frac{P-1500}{-500}$$

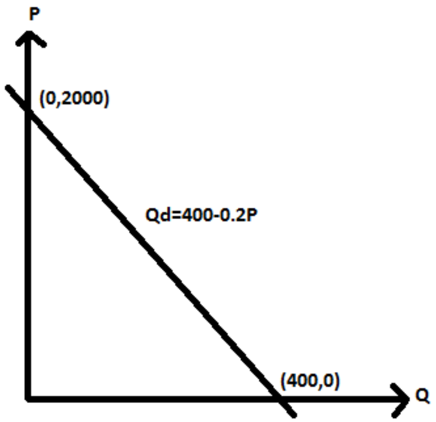
Fungsi yang terbentuk : $-500(Q-100)=100(P-1500)$

$$-500Q+50000=100P-150000$$

$$-500Q=100P-200000$$

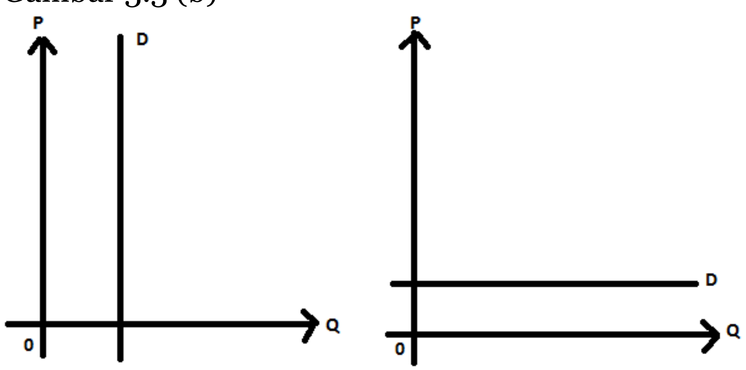
$$Q=400-\frac{1}{5}P$$

Kurva permintaan dapat dilihat pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2 Kurva permintaan Q_d = 400-0.2P

Fungsi permintaan di atas merupakan penerapan fungsi linear dalam kegiatan ekonomi dan bisnis. Fungsi permintaan yang memiliki kemiringan garis nol dan tak terhingga disebut **fungsi permintaan khusus**. Fungsi ini akan dijumpai pada produk-produk khusus, yaitu apabila jumlah barang konstan **Q=a** namun memiliki harga yang berubah-ubah Gambar 3.3 (a) dan harga barang tetap konstan **P=a** dengan jumlah barang yang berubah-ubah Gambar 3.3 (b)



(a) (b)

Gambar 3.3 Kurva Permintaan Khusus

Fungsi permintaan dalam bentuk nonlinear berupa fungsi kuadrat yang memiliki bentuk umum P = f(Q) adalah

$$P = c + bQ - aQ^2 \qquad (3.3)$$

dengan P = harga produk

Q = jumlah produk yang diminta

a, b, dan c = konstanta, dengan $a<0$

Seperti pada penjelasan pada bab sebelumnya, fungsi kuadrat akan membentuk kurva berbentuk parabola. Dalam penerapannya, parabola hanya akan terbuka ke bawah atau terbuka ke kiri. Jika parameter **$a<0$** pada suatu fungsi permintaan, maka parabola akan terbuka ke bawah yang menunjukkan bahwa harga produk bernilai positif. Apabila fungsi permintaan ditunjukkan dalam fungsi jumlah produk (Q = f(P)), maka bentuk umumnya

$$Q = c + bP - aP^2 \qquad (3.4)$$

Jika parameter **$a<0$** pada persamaan (3.4) maka parabola akan terbuka ke kiri yang menunjukkan bahwa jumlah produk yang diminta bernilai positif. Jadi untuk fungsi permintaan kuadrat baik yang benbentuk P = f(Q) maupun Q = f(P) grafiknya hanya digunakan dari sebagian parabola yang terletak di kuadran I.

Contoh 3.2

Diketahui fungsi permintaan $P = 4 - Q^2$, gambarkan fungsi permintaan tersebut !

Jawab

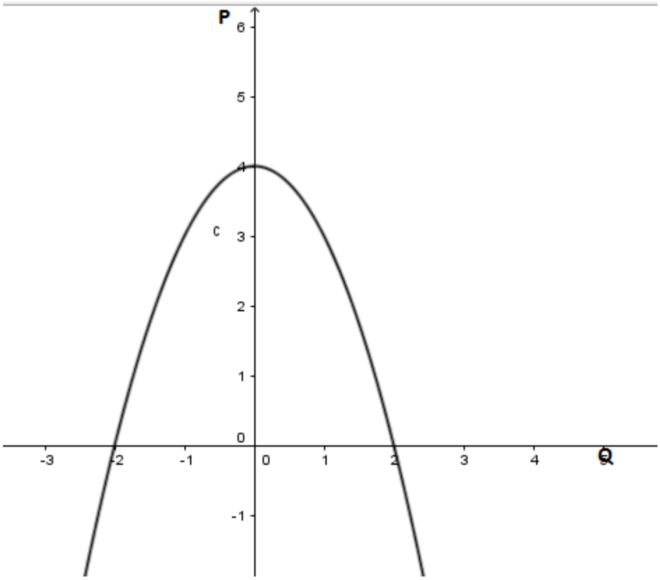
Jika Q = 0, maka P = 4, sehingga titik potong terhadap sumbu P adalah (0,4)

Jika P = 0, maka $0 = 4 - Q^2$

$Q^2 = 4$

$Q_1 = 2$ dan $Q_2 = -2$ (tidak memenuhi)

Jadi titik potong parabola terhadap sumbu Q adalah (2,0) dan (-2,0). Sedangkan koordinat titik puncaknya (0,4).



Gambar 3.4 Kurva permintaan $P = 4 - Q^2$

C. Fungsi Penawaran

Fungsi penawaran menghubungkan variabel jumlah barang yang ditawarkan oleh penjual/produsen dengan variabel harga barang. Fungsi penawara memiliki bentuk umum

$Q_{sx}=f(P_x)$, (3.3)

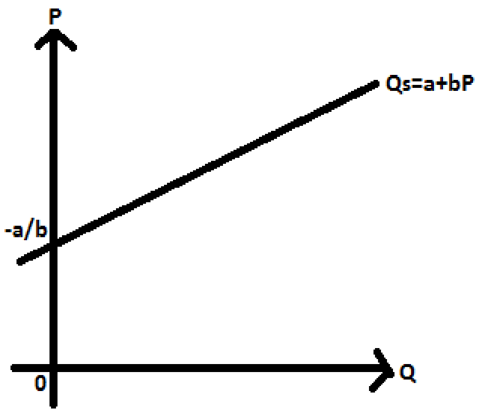
di mana Q_{sx} adalah jumlah barang yang ditawarkan oleh produsen

P_x adalah harga barang

Fungsi penawaran (3.3) apabila ditransformasikan ke dalam bentuk persamaan liner akan menjadi,

$Q_{sx}=a+bP_x$ (3.4)

Koefisien **Px** yaitu **b**, bernilai positif yang sesuai dengan hukum penawaran, yaitu semakin banyak barang yang ditawarkan, maka semakin tinggi harga barang tersebut. Sehingga, jika digambarkan dalam bidang koordinat cartesius, kurvanya dari kiri bawah ke kanan atas seperti pada gambar 3.5 berikut.



Gambar 3.5 Kurva Fungsi Penawaran

Contoh 3.3

Jika harga suatu barang Rp. 1.200,00 maka jumlah barang yang terjual sebanyak 20 unit. Jika harga barang naik Rp. 1.500,00 maka umlah barang yang terjual sebanyak 50 unit. Tentukan fungsi penawaran yang teradi dan gambarkan grafiknya!

Jawab

Diketahui P1=1200, P2=1500, Q1=20, dan Q2=50

Fungsi penawaran yang terbentuk

$$\frac{Q-Q_1}{Q_2-Q_1}=\frac{P-P_1}{P_2-P_1}$$

$$\frac{Q-20}{50-20}=\frac{P-1200}{1500-1200}$$

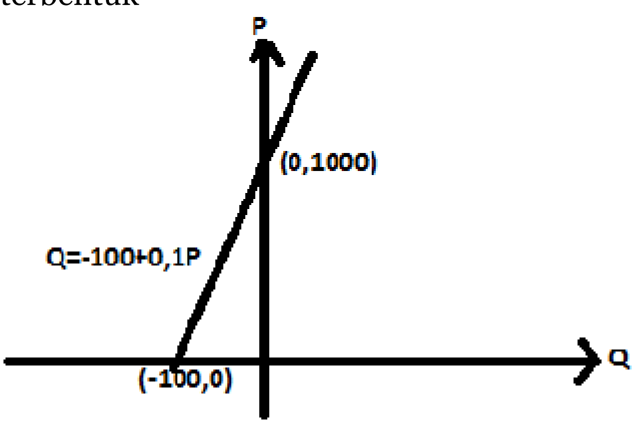
$$\frac{Q-20}{30}=\frac{P-1200}{300}$$

$$300(Q-20)=30(P-1200)$$

$$300Q-6000=30P-36000$$

$$300Q=30P-30000$$

$$Q=-100+\frac{1}{10}P$$



Gambar 3.6 Kurva penawaran Q=-100+0,1P

Fungsi penawaran memiliki kemiringan garis atau slope positif, namun untuk fungsi penawaran khusus memiliki kemiringan garis atau slope bernilai nol dan tak terhingga seperti pada fungsi permintaan.

Analog dengan fungsi permintaan kuadrat, analisis fungsi penawaran kuadrat tidak jauh beda dengan fungsi kuadrat pada umunya. Bentuk umum fungsi penawaran kuadrat $P = f(Q)$ adalah $P = c + bQ + aQ^2$ (3.5)

dengan P = harga produk

Q = jumlah produk yang ditawarkan

a, b, c = konstanta dengan $a>0$

Parabola akan terbuka ke atas apabila parameter **a>0**.

Sedangkan jika fungsi kuadrat dalam fungsi Q, maka bentuk umum fungsi penawaran kuadrat $Q = f(P)$ adalah $Q = c + bQ + aQ^2$ (3.6)

Parabola akan terbuka ke kanan apabila parameter **a>0**.

Contoh 3.4

Diketahui fungsi penawaran kuadrat $Q = P^2 + 2P + 1$. Gambarkan kurva fungsi penawaran tersebut.

Jawab

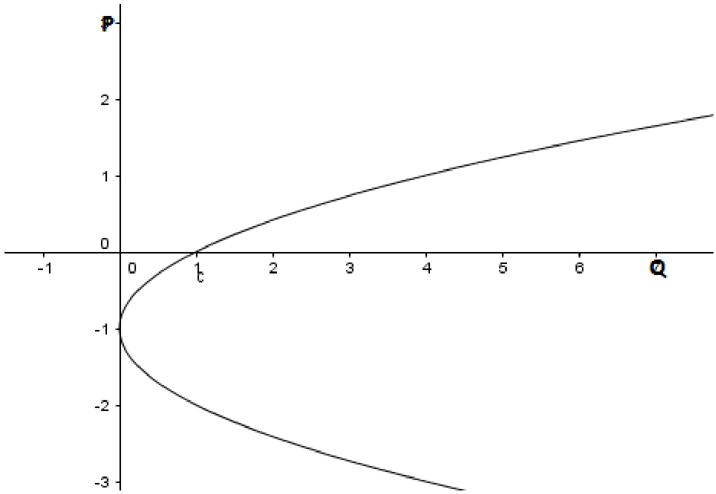
Jika $P = 0$, maka $Q = 1$, sehingga titik potong terhadap sumbu P adalah (1,0)

Jika $Q = 0$, maka $0 = P^2 + 2P + 1$

$0 = (P + 1)(P+1)$

$P_1 = P_2 = -1$ (tidak memenuhi)

Jadi titik potong parabola terhadap sumbu Q adalah (0,-1). Sedangkan koordinat titik puncaknya (0,-1).



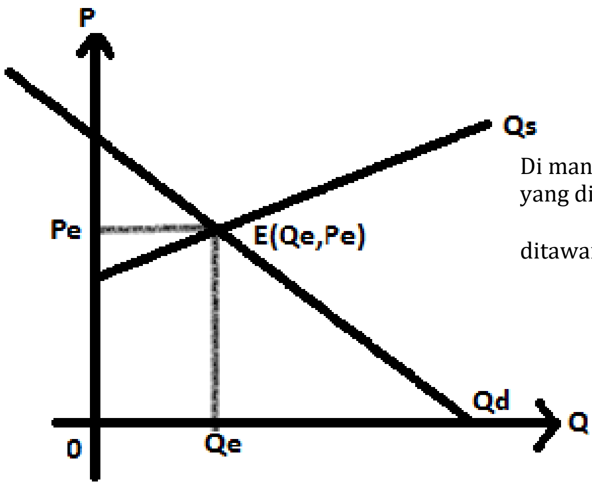
Gambar 3.7 kurva penawaran $Q = P^2 + 2P + 1$

D. Keseimbangan Pasar

Analisis selanjutnya dalam penerapan fungsi adalah keseimbangan pasar. Interaksi yang terjadi antara fungsi permintaan $Q = a - bP$ dan fungsi penawaran $Q = a + bP$ akan mengakibatkan adanya keseimbangan pasar satu macam produk, karena kedua fungsi tersebut hanya memuat satu variabel bebas.

Keseimbangan pasar yang terjadi akan menciptakan jumlah dan harga keseimbangan pasar, yang merupakan kesepakatan antara pelaku ekonomi di pasar (penjual dan pembeli). Dalam hal ini, syarat mencapai keseimbangan pasar adalah banyaknya barang yang ditawarkan produsen sama dengan banyaknya barang yang diminta konsumen, **Qs = Qd,** atau harga produk yang ditawarkan sama dengan harga produk yang diminta, **Ps = Pd.** Secara ***Aljabar***, untuk menentukan keseimbangan pasar dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan linear antara fungsi permintaan dan fungi penawaran. Sedangkan secara

geometri, keseimbangan pasar dapat dilihat dari titik potong grafik fungsi permintaan dan grafik fungsi penawaran. Sebagai contoh dapat dilihat pada gambar 3.8 berikut.



Di mana, Qd = banyaknya barang yang diminta
Qs = banyaknya barang yang ditawarkan
Qe = jumlah keseimbangan
Pe = harga keseimbangan
E = keseimbangan pasar

Gambar 3.8 Keseimbangan Pasar

Contoh 3.5

Fungsi permintaan dan fungsi penawaran berturut-turut ditunjukkan oleh persamaan :

Qd = 15-P dan Qs = 3P-3

Tentukan :

a. Harga dan jumlah keseimbangan
b. Gambar kurva keseimbangan pasarnya

Jawab!

a. Syarat keseimbangan pasar Qd = Qs

Sehingga 15-P = 3P-3

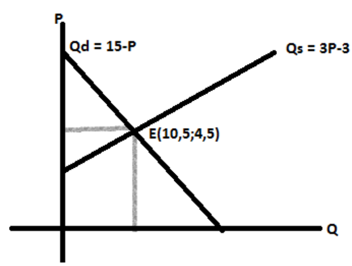
18 = 4P

4,5 = P, dan

10,5 = Q

Jadi, Pe = 4,5 dan Qe = 10,5

b.



Gambar 3.9 Kurva Keseimbangan Pasar

Contoh 3.6

Fungsi permintaan ditunjukkan oleh Pd = - Q + 6 dan fungsi penawaran ditunjukkan oleh Ps = Q + 12

a. Hitunglah harga dan jumlah keseimbangan
b. Gambarkan kurva keseimbangan pasarnya

Jawab

a. Syarat keseimbangan pasar Pd = Ps

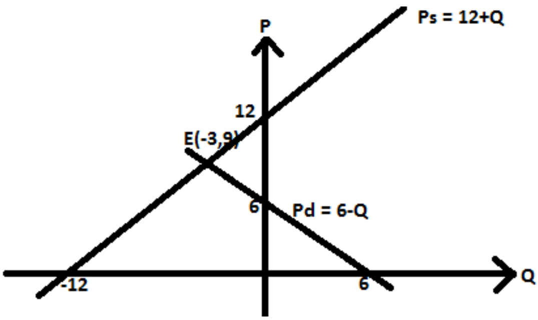
Sehingga 6-Q = 12+Q

-2Q = 6

Q = -3, dan P = 9

Jadi harga dan jumlah keseimbangan adalah E(-3,9)

b.



Gambar 3.10 Kurva Keseimbangan Pasar Yang Tidak Memiliki Arti Ekonomi Di Titik E (-3,9)

Keseimbangan pasar dapat dipenuhi oleh titik potong grafik fungsi permintaan dan grafik fungsi penawaran yang berada dalam satu diagram. Selain keseimbangan pasar berbentuk fungsi linear, keseimbangan pasar juga terdapat fungsi berbentuk kuadrat. Analisis permasalahannya sama dengan keseimbangan pasar untuk fungsi linear.

Contoh 3.7

Diketahui fungsi permintaan dan kuadrat dan fungsi penawaran kuadrat berturut-turut

$P_d = 18 - 3Q^2$ dan $P_s = Q^2 + 4Q + 4$. Tentukan hargadan jumlah keseimbangan, serta gambarkan kurvanya !

Jawab

Syarat keseimbangan pasar $P_d = P_s$

$18 - 3Q^2 = Q^2 + 2Q + 4$

$4Q^2 + 2Q - 14 = 0$

$2Q^2 + Q - 7 = 0$

$(2Q + 2{,}1)(Q - 1{,}6) = 0$

$Q_1 = -2{,}1$ (tidak memenuhi) , $Q_2 = 1{,}6$

Substitusi Q_2 ke $P = 18 - 3Q^2$, sehingga didapat $P = 10{,}32$

Jadi keseimbangan pasar di titik E (1,6;10,32)

Kurva keseimbangan pasar pada contoh soal ini diberikan kepada mahasiswa sebagai latihan

E. Keseimbangan Pasar Dua Macam Produk

Pada subbab sebelumya, dijelaskan bahwa harga barang akan mempengaruhi jumlah barang yang diminta konsumen dan jumlah barang yang ditawarkan produsen. Selanjutnya, pada subbab ini akan dijelaskan bahwa jumlah barang yang ditawarkan dan diminta dari suatu produk dipengaruhi oleh harga barang lain yang salig berhubungan. Sehingga dapat dikatakan bahwa fungsi permitaan dan fungsi penawaran akan diperluas dengan keberadaan dua variabel bebas yang mempengaruhinya. Dalam hal ini, dua macam produk saling berhubungan secara komplemen (pelengkap) dan secara substitusi (pengganti).

Misalkan saja terdapat produk X dan produk Y yang saling berhubungan di mana Qdx adalah jumlah permintaan produk X, Qdy jumlah permintaa produk Y, Px adalah harga produk X, Py adalah harga produk Y, maka fungsi permintaan kedua produk tersebut dapat ditulis sebagai berikut :

$Q_{dx} = a_0 - a_1P_x + a_2P_y,$ (3.7)
$Q_{dy} = b_0 + b_1P_x - b_2P_y$ (3.8)

Fungsi penawaran untuk kedua produk ditunjukkan oleh persamaan beriku:

$Q_{sx} = -m_0 + m_1P_x + m_2P_y,$ (3.9)
$Q_{sx} = -n_0 + n_1P_x + n_2P_y,$ (3.10)

Di mana, Q_{dx} = jumlah produk X yang diminta
Q_{dy} = jumlah produk Y yang diminta
Q_{sx} = jumlah produk X yang ditawarkan
Q_{sy} = jumlah produk Y yang ditawarkan
P_x = harga produk X
P_y = harga produk Y
a_0, b_0, m_0, dan n_0 adalah kosntanta

Keseimbangan pasar dua macam produk ini kana terjadi apabila jumlah produk X yang ditawarkan sama dengan jumlah produk X yang diminta ($Q_{dx}=Q_{sx}$), dan jumlah produk Y yang diminta sama dengan jumlah produk Y yang ditawarkan ($Q_{dy} = Q_{sy}$). Harga dan jumlah keseimbangan pasar dua macam produk ini akan diperoleh denga menyelesaikan keempat persamaan di atas.

Contoh 3.8

Diketahui fungsi permintaan dan fungsi penawaran dari dua macam produk yang mempunyai hubungan saling subtitusi adalah sebagai berikut :

$Q_{dx} = 5 - 2P_x + P_y$, (3.11)
$Q_{dy} = 6 + P_x - P_y$ (3.12)

Dan

$Q_{sx} = -5 + 4P_x - P_y$, (3.13)
$Q_{sx} = -4 - P_x + 3P_y,$ (3.14)

Tentukan harga dan jumlah keseimbangan pasar!

Jawab

Dengan menggunakan metode eliminasi, kita selesaikan persamaan (3.11) dan (3.13)

$Qdx = Qsx$

$5 - 2Px + Py = -5 + 4Px - Py$

$10 = 6Px – 2Py$ (3.15)

Eliminasi juga dilakukan pada persamaan (3.12) dan (3.14)

$Qdy = Qsy$

$6+Px-Py = -4 – Px + 3Py$

$10 = 2Px + 4Py$ (3.16)

Selanjutnya, eliminasi persamaan (3.15) dan persamaan (3.16) untuk menentukan nilai Px dan Py

$10 = 6Px – 2Py$ (x2) $20 = 12Px – 4Py$

$10 = 2Px + 4Py$ (x1) $10 = 2Px + 4Py$ +

$30 = 10 Px$, jadi $Px = 3$

Subtitusikan nilai $Px = 3$, ke persamaan (3.14), sehingga diperoleh $Py = 4$

Selanjutnya, substitusikan nilai $Px = 3$, dan $Py = 4$, ke persamaan (3.9) dan (3.10)

$Qdx = 5 – 2(3) + 4 = 3$, dan $Qdy = 6 + 3 – 4 = 5$

Jadi nilai $Qx = 3$, $Qy = 5$, $Px = 3$, dan $Py = 4$

F. Pengaruh Pajak Spesifik Terhadap Keseimbangan Pasar

Pemerintah mengenakan pajak atas setiap hasil penjualan produk. Keseimbangan pasar (harga dan jumlah produk) juga dipengaruhi oleh adanya pembebanan pajak, baik spesifik maupun proporsional. Akibatnya, jika pemerintah mengenakan pajak terhadap penjualan suatu produk, pasti harga produk akan naik, dan jumlah produk yang diminta atau ditawarkan akan menurun. Dalam hal ini, produsen tidak mau menanggung pajak yang dibebankan pemerintah, sehingga mengalihkan sebagian pajak kepada konsumen dengan jalan menaikkan harga produk di pasar. Adanya pajak akan mempengaruhi fungsi dan kurva penawaran. Misalkan fungsi penawaran sebelum pajak ditunjukkan oleh fungsi,

$P = f(Q)$, (3.17)

Fungsi penawaran akan berubah saat dikenakan pajak sebesar ***t*** per unit terhadap penjualan. Sehingga fungsinya menjadi,

$P_t = f(Q) + t$ (3.18)

Secara geometri, kurva penawaran setelah pajak akan bergerak ke atas dari kurva penawaran sebelum pajak dengan artian bahwa nilai slope/kemiringan garisnya lebih besar. Besar pajak total yang diterima oleh pemerintah, dapat ditentukan dengan rumus

$T = tQ_t$ (3.19)

Di mana, T = jumlah penerimaan pajak oleh pemerintah
t = pajak per unit produk
Q_t = jumlah keseimbangan setelah kena pajak

Penerimaan pajak total T oleh pemeritah sebagian ditanggung oleh produsen dan sebagian pula ditanggung konsumen. Besarnya pajakyang ditanggung konsumen. Besarnya pajak yang ditanggung konsumen dirumuskan oleh persamaan ,

$t_k = (P_t - P_e)$ (3.20)

di mana;
t_k = pajak konsumen
P_t = harga keseimbangan setelah pajak
P_e = harga keseimbangan sebelum pajak

Selisih besarnya pajak per unit barang (t) dengan bagian pajak yang menjadi tanggungan konsumen (t_k) merupakan perhitungan untuk menentukan besar pajak yang ditanggung produsen (t_p), yaitu

$t_p = t - t_k$ (3.21)

di mana,

t_p = pajak yang ditanggung produsen

t = pajak per unit barang

t_k = pajak yang ditanggung konsumen

Contoh 3.9

Diketahui fungsi permintaan $P = 10\text{-}2Q$, sedangkan fungsi penawarannya $P = 5+0{,}5Q$. Terhadap barang tersebut dikenakan pajak spesifik sebesar 4 per unit. Tentukan:

a. Jumlah keseimbangan serta harga keseimbangan sebelum pajak
b. Jumlah keseimbangan serta harga keseimbangan setelah pajak
c. Beban pajak yang ditanggung produsen dan konsumen
d. Pajak yang diterima pemerintah

Jawab

Fungsi permintaan $P=10\text{-}2Q \rightarrow Q=5\text{-}0{,}5P$

Fungsi penawaran $P=5+0{,}5Q \rightarrow Q=2P\text{-}10$

a. Keseimbangan pasar terjadi saat $Q_d=Q_s$

   $5\text{-}0{,}5P=2P\text{-}10$

   $15=2{,}5P$

   $6=P$ (harga keseimbangan), maka $Q=2$ (jumlah keseimbangan)

   Jadi, $P_e = 6$ dan $Q_e = 2$

b. Pajak mempengaruhi fungsi penawaran, sehingga fungsi penawaran setelah pajak adalah $P=5+0{,}5Q+4$

   $P=9+0{,}5Q \rightarrow Q=2P\text{-}18$

   Keseimbangan pasar setelah pajak saat $Q_d = Q_s'$

   $5\text{-}0{,}5P = 2P\text{-}18$

   $23 = 2{,}5P$

9,2 = P'e (harga keseimbangan setelah pajak),
maka Q'e= 0,4 (jumlah keseimbangan setelah pajak)

c. Beban pajak yang ditanggung konsumen (t_k)

   $t_k = P'_e - P_e$
   $= 9,2 – 6$
   $= 3,2$

   Beban pajak yang ditanggung produsen (t_p)

   $t_p = t - t_k$
   $= 4-3,2$
   $= 0,8$

d. Pajak yang diterima pemerintah (T)

   T= Q'e x t
   = 0,4 x 4
   = 1,6

G. Pengaruh Proporsional Terhadap Keseimbangan Pasar

Berbeda halnya dengan pajak spesifik yang besarnya ditetapkan untuk tiap unit barang, pajak proporsional besarnya ditetapkan berdasarkna persentase tertentu dari harga jual. Pengaruh kedua pajak tersebut terhadap keseimbangan pasar adalah sama, yaitu mengurangi jumlah keseimbangan dan menaikkan harga keseimbangan. Namun, secara analisis permasalahan kedua pajak tersebut berbeda. Maksudnya, pajak spesifik menyebabkan kurva penawaran setelah pajak bergeser ke atas sejajar kurva penawaran sebelum pajak dengan kata lain kurvanya memiliki slope/gradient yang sama, sedangkan pajak proporsional menyebabkan kurva penawaran memiliki slope/gradient yang lebih besar dari kurva penawaran sebelum pajak.

Andaikan fungsi penawaran sebelum pajak dinyatakan dengan P = a+bQ, maka dengan dikenakannya pajak proporsional sebesar t% dari harga jual, maka persamaan penawarannya menjadi

P = a+bQ+tP , degan t adalah pajak proporsional dalam %

P – tP = a+bQ

P(1-t) = a+bQ

$$P = \frac{a+bQ}{1-t} \; atau \quad Q = \frac{P(1-t)-a}{b} \qquad (3.22)$$

Contoh 3.10

Diketahui fungsi permintaan akan suatu barang P = 10-2Q, sedangkan fungsi penawarannya P = 5+0,5Q. Pajak proporsional yang dibebankan sebesar 20%.

Tentukan:

a. Harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan sebelum pajak
b. Harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan setelah pajak
c. Besarnya pajak yang diterima pemeritah

Jawab

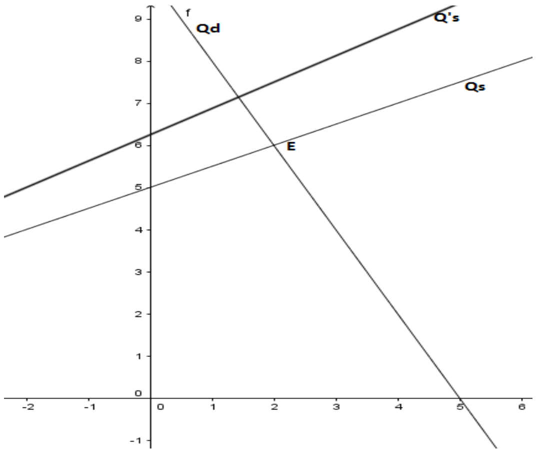
Fungsi permintaan P=10-2Q $\rightarrow$ Q=5-0,5P

Fungsi penawaran P=5+0,5Q $\rightarrow$ Q=2P-10

a. Keseimbangan pasar terjadi saat $Q_d=Q_s$
   5-0,5P=2P-10
   15=2,5P
   6=P (harga keseimbangan), maka Q=2 (jumlah keseimbangan)
   Jadi, $P_e = 6$ dan $Q_e = 2$
b. Fungsi penawaran setelah pajak, denga t=20%=0.2
   P=5+0,5Q+0,2P
   0,8P=5+0,5Q
   0,8P – 5 = 0,5Q
   1,6P – 10 = Q'_s
   Keseimbangan pasar setelah pajak $Q_d = Q'_s$
   5 – 0,5P = -10 +1,6P
   15 = 2,1 P

7,14 = P’e (harga keseimbangan setelah pajak),
Q’e = 1,42 (jumlah keseimbangan setelah pajak)

c. Besarnya pajak yang diterima pemerintah adalah t x P'_e = 0,2 x 7,14 = 1,43



Gambar 3.11 Kurva pengaruh pajak proporsional terhadap Keseimbangan Pasar

H. Pengaruh Subsidi Terhadap Keseimbangan Pasar

Bantuan yang diberikan oleh pemerintah kepada masyarakat utamanya produsen disebut sebagai ***Subsidi.***, Subsidi merupakan kebalkan dari pajak sehingga analisisnya seperti analisis pengaruh pajak padabab sebelumnya. Dalam buku ini hanya dibahas terkait pengaruh subsidi spesifik terhadap keseimbangan pasar. Subsidi proporsinal dapat kalian temukan sendiri sebagaimana analisis pengaruh pajak proporsonal pada subbab sebelumnya.

Subsidi atas produksi/penjualan barang membantu produsen dalam memperkecil biaya produksi, sehingga produsen berani memberikan harga jual yang lebih murah kepada konsumen. Hal ini mengakibatkan harga keseimbangan pasar juga lebih rendah setelah adanya subsidi, sedangkan jumlah keseimbangan menjadi lebih banyak.

Subsidi yang diberikan sebesar ***s*** menyebabkan kurva penawaran bergeser sejajar ke bawah, dengan titik potong yang lebih rendah pada sumbu harga. Misalkan fungsi penawaran sebelum subsidi adalah P = a+bQ, maka setelah diberikan subsidi fungsi penawaran menjadi $P = a+bQ-s = a-s+bQ$. (3.23)

Subsidi yang diberikan pemerintah dalam hal produksi menyebabkan biaya produksi yang dikeluarkan produsen lebih rendah dari sebelum mendapatkan subsidi. Selisih biaya produksi n harga jual barang lebih rendah. Subsidi merupakan kebalikan dari pajak biasa disebut juga pajak negative. Pengaruh subsidi terhadap keseimbangan pasar berlawanan dengan pengaruh awal dengan biaya produksi setelah subsidi merupakan besarnya subsidi yang dinikmati produsen. Hal tersebut menyebabkan produsen berani memberikan harga jual yang lebih murah kepada konsumen sebagai bagian subsidi yang dapat dinikmati oleh konsumen. Besarnya subsidi yang dinikmati konsumen (s_k) merupakan selisih harga keseimbangan tanpa subsidi (P_e) dan harga keseimbangan setelah subsidi (P'_e).

$s_k = P_e - P'_e$ (3.24)

Besarnya subsidiyang dapat dinikmati produsen (s_p) adalah selisih besarnya subsidi per unit barang (s) dengan besarnya subsidi yang dapat dinikmati konsumen (s_k).

$s_p = s - s_k$ (3.25)

Besarnya jumlah subsidi yang diberikan oleh pemerintah (S) dapat ditentukan dengan mengalikan jumlah keseimbangan setelah subsidi (Q'_e) dengan subsidi per unit barang (s).

$S = Q'_e \times s$ (3.26)

Contoh 3.11

Fungsi permintaan akan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan P = 12-Q, sedangkan fungsi penawarannya P = 6 +2Q. Pemerintah memberikan subsidi sebesar 3 per unit barang yang diproduksi. Tentukan :

a. Harga dan jumlah keseimbangan sebelum subsidi
b. Harga dan jumlah keseimbangan setelah subsidi
c. Besar subsidi yang dinikmati produsen dan konsumen
d. Besar subsidi yang diberikan oleh pemerintah

Jawab

Fungsi permintaan P =12-Q, maka Q=12 – P

Fungsi penawaran P = 6+2Q, maka Q = 0,5P – 3

a. Keseimbangan pasar $Q_d = Q_s$
   $12 - P = -3 + 0{,}5P$
   $15 = 1{,}5P$
   $10 = P_e$ (harga keseimbangan sebelum subsidi)
   $2 = Q_e$ (jumlah keseimbangan sebelum subsidi)
b. Fungsi penawaran sebelum subsidi $Q = 0{,}5P - 3$
   Fungsi penawaran setelah subsidi $P = 6+2Q-3 \rightarrow P = 3+2Q \rightarrow Q = 0{,}5P - 1{,}5$
   Keseimbangan pasar setelah subsidi $Q_d = Q'_s$
   $12 - P = 0{,}5P - 1{,}5$
   $13{,}5 = 1{,}5\,P$
   $9 = P'_e$ (harga keseimbangan setelah subsidi)
   $3 = Q'e$ (jumlah keseimbangan setelah subsidi)
c. Besar subsidi yang dinikmati konsumen
   $s_k = P_e - P'_e$
   $= 10 - 9$
   $= 1$

Besar subsidi yang dinikmati produsen

$s_p = s - s_k$

$= 3 - 1$

$= 2$

d. Besar subsdi yang diberikan oleh pemerintah

$S = Q'_e \text{ x } s$

$= 3 \text{ x } 3$

$= 9$

I. Fungsi Biaya Dan Fungsi Penerimaan

Fungsi biaya merupakan fungsi dari biaya total yang digunakan perusahaan dalam memproduksi barang. Biaya total perusahaan terdiri dari biaya tetap (fixed cost) dan biaya variabel (variable cost). Biaya tetap tidak tergantung terhadap jumlah barang yang dihasilkan dan secara matematis merupakan sebuah konstanta yang kurvanya berupa garis lurus sejajar sumbu jumlah barang (Q). Sebaliknya biaya variabel bergantung terhadap banyaknya barang yang dihasilkan. Semakin banyak barang yang dihasilkan semakin banyak pula biaya variabel yang dibutuhkan. Secara matematis, biaya variabel adalah fungsi jumlah barang yang dihasilkan dengan kurva berupa garis lurus memiliki slope/gradient positif yang berawal dari pusat sumbu koordinat (0,0).

$FC = k$ (3.27)

$VC = f(Q) = vQ$ (3.28)

$C = g(Q) = FC + VC = k + vQ$ (3.29)

FC = biaya tetap

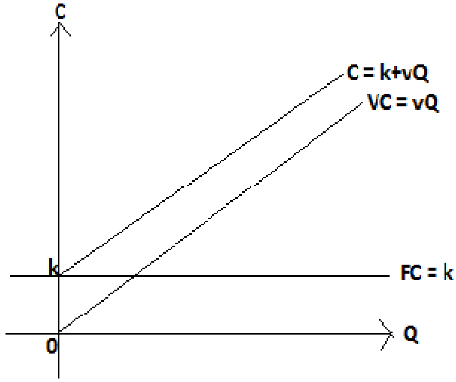
VC = biaya variabel

C = biaya total (satuan moneter)

k = kostanta

Q = jumlah barang (satuan unit)

v = slope/gradient kurva VC dan kurva C



Gambar 3.12 Fungsi Biaya

Contoh 3.12

Sebuah perusahaan dalam memproduksi barang mengeluarkan biaya tetap sebesar Rp. 15.000,00. Sedangkan biaya variabelnya ditentukan oleh fungsi VC = 120Q.

Tentukan :

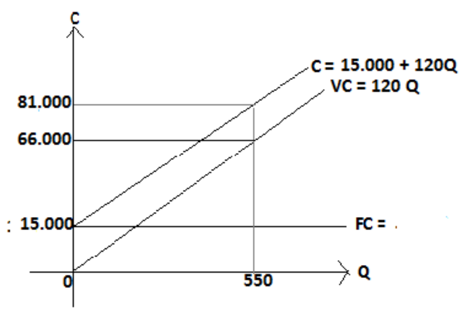
a. Persamaan dan kurva biaya total
b. Biaya total yang dikeluarkan perusahaan jika berhasil memproduksi 550 unit barang

Jawab

FC = 15.000

VC = 120 Q

a. Persamaan biaya total C = 15.000 + 120 Q
b. Jika Q = 550, maka C = 15.000 + 120 (550) = 81.000



Gambar 3.13 Kurva biaya total C = 15.000 + 120Q

Penerimaan total perusahaan merupakan total semua hasil penjualan perusahaan atas barang yang telah diproduksi. Semakin banyak barang yang diproduksi dan terjual, semakin banyak pula hasil peerimaan yang didapatkan. Penghitungan penerimaan total (total revenue) adalah perkalian antara harga per unit barang dengan total jumlah barang yang terjual. Kurva dari fungsi penerimaan berupa garis lurus berlereng positif dan berawal dari pangkal sumbu koordinat (0.0). fungsi penerimaan dirumuskan oleh

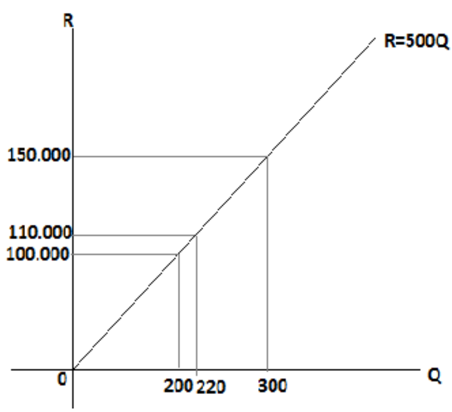
$$R = P \times Q = f(Q) \quad (3.30)$$

Contoh 3.13

Diketahui harga jual barang Rp. 500,00 per unit. Tentukan !

a. Persamaan penerimaan
b. Gambarkan kurva fungsi permintaa
c. Besar penerimaan jika jumlah barang yang terjual 220

Jawab

a. Fungsi penerimaan ditentukan dengan rumus R = Q x P
   R = Q x 500
   = 500Q
b. 

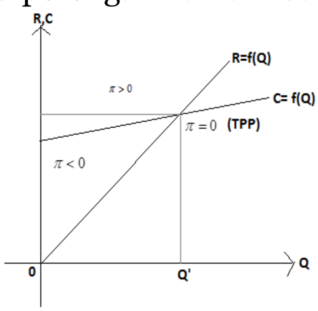
Gambar 3.14 Kurva fungsi penerimaan R = 500Q

c. Besar penerimaan saat Q=220
   R = 500 x 220
      = 110000

J. Analisis Pulang Pokok

Fungsi biaya dan fungsi penerimaan merupakan variabel-variabel yang dapat digunakan untuk mengetahui kondisi suatu perusahaan apakah mengalami kerugian atau mendapatkan keuntungan dari memproduksi suatu barang. Perusahaan mendapatkan keuntungan (profit positif, $\pi > 0$) jika R>C yang secara grafik terlihat bahwa area kurva R berada di atas kurva C. Sebaliknya, perusahaanakan mengalami kerugian (profit negative, $\pi < 0$) jika R<C yang terlihat bahwa kurva R berada di bawah kurva C.

Konsep selanjutnya terkait **analisis pulang pokok** (*break event point*), yaitu konsep yang menjelaskan jumlah produksi minimal yang harus dihasilkan perusahaan agar tidak mengalami kerugian. Kondisi pulang pokok (profit nol, $\pi = 0$), terjadi saat R = C di mana perusahaan tidak mengalami kerugian dan tidak mendapat keuntungan. Secara grafik analisis pulang pokok terjadi pada perpotongan kurva R dan kurva C.



Q = Jumlah produk
C =Biaya Total
R = Penerimaan Total
TPP= Titik Pulang Pokok (break event point)
π = Profit (R-C)

Gambar 3.15 Kurva Analisis Pulang Pokok

Q' mencerminkan jumlah barang ang menebabkan pulang pokok. Daerah sebelah kanan Q' menggambarkan kondisi perusahaan mendapatka keuntungan. Sedangkan daerah sebelah kiri Q' menunjukkan kondisi perusahaan mengalami kerugian.

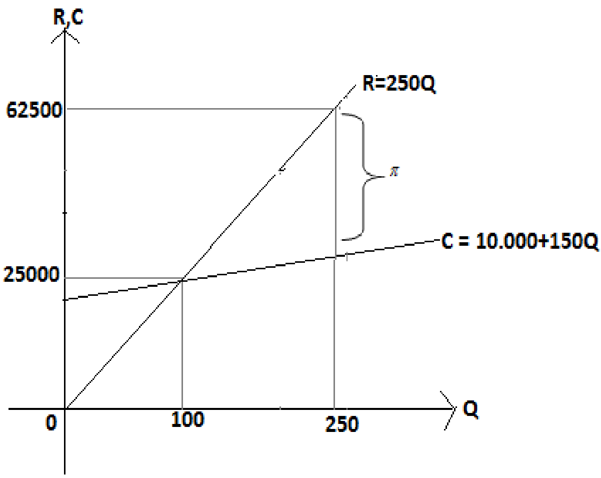
Contoh 3.14

Diketahui fungsi biaya total dan penerimaan total perusahaan berturut-turut ditunjukkan oleh persamaan C = 10.000 + 150Q dan R = 250Q. Tentukan :

a. Jumlah barang yang harus diproduksi agar pulang pokok
b. Kondisi perusahaan saat memproduksi barang sebanyak 250
c. Gambar kurva dari permasalahan di atas

Jawab

a. Kondisi pulang pokok terjadi saat $\pi = 0$,
   R – C = 0
   R = C
   250Q = 10.000 + 150Q
   100Q =10.000
   Q = 100
   Jadi jumlah barang yang harus diproduksi perusahaan agar pulang pokok adalah 100 unit
b. Jika Q = 250, maka
   R = 250Q = 250(250)=62.500
   C = 10.000 + 150Q = 10.000 + 150(250) = 47.500
   Karena R>C, maka kondisi perusahaan mendapatkan keuntungan sebesar
   $$\pi = R - C$$
   $$= 15.000$$

c. 

Gambar 3.16 Kurva Analisis Pulang-Pokok

K. Fungsi Konsumsi Dan Fungsi Tabungan

Kegiatan konsumsi dan menabung termasuk dalam alokasi pendapatan nasional masyarakat dalam suatu negara. Misalkan ***Y*** melambangkan pendapatan nasional, ***C*** melambangkan konsumsi, dan ***S*** melambangkan tabungan, maka dari ketiganya memiliki hubungan sebagai berikut :

$$Y = C + S \qquad (3.31)$$

Secara matematis, fungsi konsumsi dan fungsi tabungan memiliki hubungan linier yang berbanding lurus dengan pendapatan nasional. Artinya, semakin tinggi tingkat pendapatan nasional, maka semakin tinggi pula tingkat konsumsi dan tabungan masyarakat. Sebaliknya, jika pendapatan rendah, maka konsumsi dan tabungan masyarakat juga rendah.

Fungsi konsumsi menjelaskan hubungan konsumsi dengan pendapatan nasional yang dirumuskan dengan ;

$$C = f(Y) = C_0 + cY \qquad (3.32)$$

Di mana; C_0 = konsumsi otonom (besarnya saat Y=0)

$$c = \text{MPC (konsumsi marginal)} = \frac{\Delta C}{\Delta Y}$$

Secara grafik C_0 merupakan titik potong kurva fungsi konsumsi pada sumbu vertical C. Sedangkan koefisien c menunjukkan besarnya konsumsi marginal karena adanya tambahan pendapatan nasional dan merupakan slope/gradient dari kurva fungsi konsumsi.

Fungsi tabungan menjelaskan hubungan antara tabungan dengan pendapatan nasional yang dirumuskan dengan ;

$$S = g(Y) = S_0 + sY \qquad (3.33)$$

Di mana; S_0 = tabungan otonom (besarnya saat Y=0)

$$s = \text{MPS (tabungan marginal)} = \frac{\Delta S}{\Delta Y}$$

Secara grafik S_0 merupakan titik potong kurva fungsi tabungan pada sumbu vertical S. Sedangkan koefisien s menunjukkan besarnya tabungan marginal karena adanya tambahan pendapatan nasional dan merupakan slope/gradient dari kurva fungsi tabungan.

Fungsi tabungan dapat pula ditunjukkan dari persamaan (3.31), yaitu persamaan Y = C+S.

$Y = C + S$

$S = Y - C$

$S = Y - (C_0 + cY)$, karena $C = C_0 + cY$

$$S = -C_0 + (1 - c)Y \qquad (3.34)$$

Dari persamaan (3.34), dapat ditarik kesimpulan bahwa:

$S_0 = -C_0$

$s = 1 - c \longrightarrow s + c = 1$

$MPS = 1 - MPC, \longrightarrow MPC + MPS = 1$

Contoh 3.15

Diketahui fungi konsumsi suatu negara adalah $C = 25 + 0{,}6Y$. Tentukan (a) fungsi tabungannya, (b) besar konsumsi jika tabungan sebesar 10 milyar

Jawab

a.Fungsi tabungan = $Y - C$

$$S = Y - (25 + 0{,}6Y)$$

$$S = 0{,}4Y - 25$$

b.Jika tabungan sebesar 10 milyar, maka

10 milyar = $(0{,}4Y - 25)$milyar

35 milyar = $0{,}4Y$

87,5 milyar = Y

Sehingga konsumsi sebesar $C = Y - S$, sehingga $C = 87{,}5 - 10 = 77{,}5$ Milyar

L. Ringkasan

Telah dijelaskan pada bab sebelumnya, bahwa penerapan fungsi linear sangat lazim digunakan dalam permasalahan ekonomi dan bisnis, baik dalam perekonomian mikro maupun perekonomian makro. Dua variabel atau lebih yang saling berhubungan sering dimodelkan dan diselesaikan dengan konsep fungsi.

Penerapan konsep fungsi linear nampak pada penggambaran fungsi permintaan, fungsi penawaran, fungsi biaya, analisis pulang-pokok, fungsi konsumsi dan tabungan, serta masih banyak lagi fungsi lainnya. Secara grafik penentuan titik potong sumbu X dan sumbu Y serta kemiringan garis dapat ditentukan dengan rumus-rumus yang telah dijelaskan pada bab sebelumnya.

M. Soal Latihan

1. Gambarkan kurva permintaan $P = 40 - 2Q$!
2. Diketahui fungsi permintaan $P = 200 - 5Q$. Tentukan harga barang, jika jumlah barang yang diminta sebesar 30, dan gambarkan kurva dari fungsi permintan tersebut!
3. Gambarkan fungsi penawaran $P = 4 + Q + 2Q^2$. Tentukan jumlah barang yang ditawarkan jika harga di pasar sebesar $P = 80$!
4. Tentukan keseimbangan pasar dari beberapa fungsi permintaan dan fungsi penawaran berikut ini :
   a. Fungs permintaan $P = 48 - 3Q^2$ dan fungsi penawaran $P = Q^2 + 4Q + 16$
   b. Fungsi permintaan $Q = 15 - 2P$ dan fungsi penawaran $Q = 3P - 5$
   c. Fungsi permintaan $P = 6$ dan fungsi penawaran $Q = 15P - 10$
   d. Fungsi permintaan $P = 120 - 2Q$ dan fungsi penawaran $P = 56 + 0{,}5Q$
   e. Fungsi permintaan $Q = 84 - P^2$ dan fungsi penawaran $Q = P + 16P^2$
5. Tentukan keseimbangan pasar dua macam produk jika diketahui fungsi permintaan dan fungsi penawaran sebagai berikut :
   a. $Qdx = 6 - 2Px + Py$ dan $Qdy = 10+Px-Py$
      $Qsx = -6 +4Px - Py$ dan $Qsy = -2 - Px + 3Py$
   b. $Qdx = 17 - 2Px - Py$ dan $Qdy = 14 - Px - 2Py$
      $Qsx = -10 +4Px +Py$ dan $Qsy = -7 +Px +2Py$
   c. $2Px = 14 - Qx - Qy$ dan $2Py = 4 + Qx - Qy$
      $Px = 3 + Qx - Qy$ dan $Py = 2 + Qy$
   d. $Px = 4 - Qx + Qy$ dan $Py = 4 + Qx - 3Qy$
      $4Py = 6+2Qx - Qy$ dan $2Px = 1 + Qx$
   e. $Qdx = 3 - Px +2Py$ dan $Qdy = 14 - 2Px -Py$

Qsx = -4 +2Px +2Py dan Qsy = -Px + Py

6. Diketahui fungsi permintaan P = 8 – 4Q dan fungsi penawaran P = 4 + Q. Tentukan :
   a. Harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan jika pemerintah memberikan pajak sebesar Rp. 5,00 per unit barang
   b. Pajak yang ditanggung konsumen dan pajak yang ditanggung produsen
   c. Pajak yang diterima pemerintah
   d. Gambarkan kurva permasalahan tersebut dalam satu diagram
7. Diketahui fungsi permintaan dan fungsi penawaran berturut-turut Q = 15 – P dan Q = 3P – 6. Tentukan :
   a. Harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan jika pemerintah memberikan subsidi sebesar Rp. 3,00 per unit barang
   b. Subsidi yang diterima produsen dan yang diterima konsumen
   c. Subsidi yang dibayarkan pemerintah
   d. Gambarkan kurva permasalahan tersebut dalam satu diagram
8. Seorang pengusaha meubel menghasilkan lemari kayu jati dengan harga jual per unitnya sebesar Rp. 75.000,00. Biaya tetap yang harus ia keluarkan setiap produksi sebesar Rp. 1.300.000,00 dan biaya variabel per unit Rp. 15.000,00. Tentukan berapa banyak lemari yang harus ia hasilkan agar terjadi pulang pokok?
9. Diketahui biaya tetap produksi suatu barang adalah Rp. 55.000,00. Harga jual per unit barang tersebut Rp. 2.500,00. Sedangkan biaya variabel yang ia keluarkan sebesar 60% dari harga jual per unit. Hitunglah titik pulang pokok dan gambarkan kurvanya !

10. Diketahui fungsi konsumsi C = 4,5 + 0,9Y. Pendapatan yang didapat sebesar 15 juta. Tentukan :
    a. Fungsi tabungannya
    b. Besar konsumsi nasional
    c. Gambarkan fungsi konsumsi dan fungsi tabungan dalam satu diagram

BAB IV

BARISAN DAN DERET

KEMAMPUAN AKHIR YANG DIHARAPKAN
Memahami dan Mengidentifikasi Konsep Barisan dan Deret
INDIKATOR
4.1 Mendeskripsikan Pengertian Barisan dan Deret
4.2 Mengidentifikasi Barisan dan Deret Aritmatika
4.2 Mengidentifikasi Barisan dan Deret Geometri

A. Pendahuluan

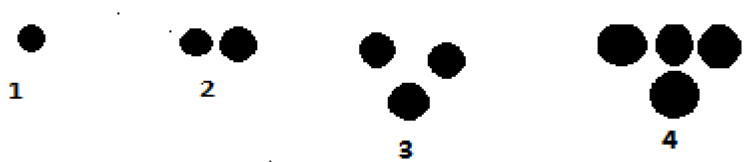
Konsep barisan dan deret merupakan salah satu materi dalam matematika yang penerapannya sering digunakan dalam masalah perekonomian. Misalkan saja, untuk menentukan besar nilai tabungan setelah beberapa waktu tertentu.selain itu juga dapat digunakan untuk mengetahui besarnya tingkat perkembangan usaha. Deret merupakan suatu rangkaian barisan yang terbentuk secara teratur dan memenuhi aturan tertentu. Bilangan-bilangan pembentuk barisan disebut sebagai **suku**. Susunan rangkaian bilangan, mengikuti pola perubahan tertentu dari satu suku ke suku berikutnya.

Suatu barisan (sequence), jika dilihat dari perubahan antara suku-suku yang berurutan dibagi menjadi dus, yaitu **barisan aritmatika** dan **barisan geometri**. Jika dlihat dari banyaknya suku, barisan dibagi menjadi **barisan hingga (finite)** dan **barisan takterhingga (infinite)**. Sedangkan deret (*series*) jika dilihat dari jumlah suku yang membentuknya, terbagi menjadi **deret hingga** (*finite series*) yang memiliki jumlah suku-suku tertentu dan jelas, dan **deret takterhingga** (*infinite series*) yang jumlah sukunya takhingga. Deret dibagi menjadi dua, yaitu **deret aritmatika / deret hitung** dan **deret geometri / deret ukur** jika dilihat dari segi pola perubahan bilangan pada suku-sukunya.

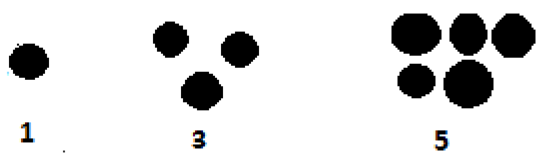
B. Barisan dan Deret

Berawal dari pola bilangan yang seringkali dilambangkan dengan noktah atau kumpulan benda – benda , misalkan

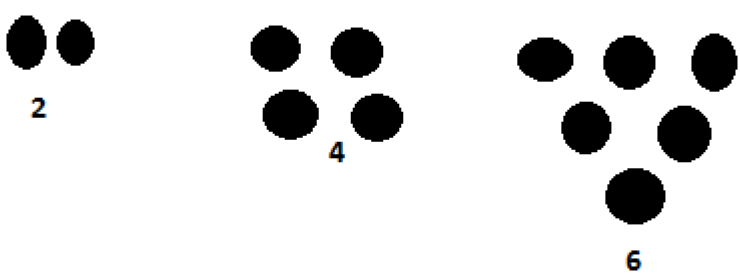
Pola Bilangan Asli



Pola Bilangan Asli Ganjil



Pola Bilangan Asli Genap



Barisan bilangan adalah susunan bilangan yang memiliki pola atau aturan tertentu antar suku – suku bilangannya. Jika suku pertama u_1 , suku kedua u_2 , suku ketiga u_3 , dan suku ke n adalah u_n , maka barisan bilangan itu dituliskan sebagai $\mathbf{u_1}$ **,** $\mathbf{u_2}$ **,** $\mathbf{u_3}$ **, . . .** $\mathbf{u_n}$**.**

Misalkan u_1 , u_2 , u_3 , . . . u_n merupakan suku-suku suatu barisan. Jumlah keseluruhan suku-suku barisan tersebut dinamakan sebagai **deret** dan dituliskan sebagai

$$\mathbf{S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n}$$

$\mathbf{S_n}$ juga dapat disebut sebagai jumlah n-suku pertama suatu barisan. Jika n merupakan bilangan asli berhingga maka deret itu dinamakan sebagai deret berhingga

C. Barisan Dan Deret Aritmatika / Deret Hitung

Barisan Aritmatika adalah suatu barisan yang setiap sukunya memiliki selisih (beda) yang konstan dengan suku berikutnya atau sebelumnya. Misalkan terdapat bilangan u_1, u_2, u_3, ..., u_n dengan sebarang nilai n berlaku u_n-u_{n-1} = b, dengan b adalah suatu konstanta yang tidak tergantung pada *n,* b disebut **beda.** Jika ***a*** adalah suku pertama barisan aritmatika dan ***b*** adalah beda, maka untuk menentukan suku ke-n barisan aritmatika dirumuskan dengan

$$Un=a+(n-1)b \qquad (4.1)$$

Misalkan diketahui barisan aritmatika dengan sukunya berjumlah ganjil (2t − 1), dengan t bilangan asli lebih dari dua, maka suku tengah barisan aritmetika itu adalah suku ke-t atau u_t yang dirumuskan dengan :

$$u_t = \frac{1}{2}(a + u_{2t-1}) \qquad (4.2)$$

Contoh 4.1

Suatu barisan 2,4,6,...,102. Tentukan suku tengah barisan tersebut !

Jawab

Suku pertama = a = 2, beda = b = 2

Suku terakhir 2_{t-1} =102

$$u_t = \frac{1}{2}(a + u_{2t-1})$$

$$u_t = \frac{1}{2}(2 + 102)$$

$$= \frac{1}{2}(104)$$

$$= 52$$

Jadi, suku tengah barisan diatas adalah 52

Contoh 4.2

Tentukan suku ke -21 dari barisan : 4,9,14,19,24,...

Jawab

Diketahui a=4, beda = b = 5

Maka suku ke-21 adalah U_{21} = a + (n – 1) b

= 4+(21-1)5

= 4+100

= 104

Contoh 4.3

Tentukan suku ke-25 suatu barisan aritmatika di mana suku ke-5 dan suku ke-10 barisan tersebut berturut-turut adalah 9 dan 39!

Jawab

Diketahui U_5 = a+4b =9 (4.3)

U_{10} = a+9b = 39 (4.4)

Eliminasi persamaan (4.3) dan (4.4) untuk menentukan nilai **b**, sehingga didapat 5b = 30 dan b=6. Substitusikan nilai b = 6 ke persamaan (4.3) sehingga di dapat a = -15. Sehingga suku ke-25 barisan tersebut adalah, U_{25} = -15 +(24)6 = -15+144 =129

Deret Aritmatika atau disebut juga **Deret Hitung** adalah jumlah suku-suku pada barisan aritmatika. Hasil dari jumlah *n* suku pertama barisan aritmetika $u_1 + u_2 + u_3 + . . . + u_n$ dirumuskan dengan menggunakan hubungan

$$S_n = \frac{1}{2}n(a + u_n) \qquad (4.5)$$

dengan n = banyak suku , a = suku pertama , dan u_n = suku ke-n barisan aritmatika.

Jumlah n suku pertama deret hitung memiliki sifat-sifat sebagai berikut :

1. $S_n = \frac{1}{2}n(a + u_n)$ yang merupakan fungsi kuadrat dari n (n bilangan asli) yang tidak memiliki suku tetap.
2. Untuk setiap $n \in$ bilangan asli berlaku $S_n - S_{n-1} = u_n$ (suku ke-n)

Contoh 4.4

Tentukan jumlah 20 suku pertama barisan aritmatika 4,9,14,19,24,...

Jawab

Diketahui a=4, b=5, dan n=20

$$S_n = \frac{1}{2}n(2a + (n-1)b)$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}\left(2(3) + (20-1)5\right)$$

$$S_{20} = 10(6 + 95)$$

$$S_{20} = 10(101)$$

$$S_{20} = 1010$$

D. Barisan dan Deret Geometri / Deret Ukur

Barisan geometri adalah suatu barisan bilangan $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n$, $n \in$ bilangan asli dan setiap suku-sukunya memiliki rasio yang tetap sehingga berlaku,

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = r, \qquad (4.6)$$

dengan **r** adalah rasio yang merupakan suatu konstanta

dan tidak tergantung pada n.
Untuk menentukan nilai suku ke-n barisan geometri, dapat digunakan rumus,

$$U_n = ar^{n-1} \quad (4.7)$$

dengan ***n*** adalah banyaknya suku barisan geometri.

Suatu barisan geometri dengan banyak suku adalah ganjil (2t – 1), dengan t ϵ bilangan asli lebih dari dua. Suku tengah barisan geometri atau u_t dirumuskan oleh dengan

$$U_t = \sqrt{a \, . \, u_{2t-1}} \quad (4.8)$$

Contoh 4.5

Suatu barisan geometri $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, ..., 128$. Tentukan suku tengah barisan tersebut!

Jawab

Suku pertama = a = $\frac{1}{8}$

Suku terakhir = 2_{t-1}=128

Suku tengah barisan tersebut adalah

$$U_t = \sqrt{a \, . \, u_{2t-1}}$$

$$U_t = \sqrt{\frac{1}{8}.128}$$

$$= \sqrt{16}$$

$$= 4$$

Contoh 4.6

Tentukan suku ke-4 dari barisan geometri yang memiliki suku pertama 16 dan rasionya 2.

Jawab

Diketahui a=16, dan r=2

U16 = ar^3

= $(16)(2)^3$

= 128

Contoh 4.7
Tentukan suku ke-12 suatu barisan geometri dimana suku ke-4 dan suku ke-10 barisan tersebut berturut-turut 16 dan 512.
Jawab
Diketahui U4=ar^3=16 dan U10 =ar^9 = 512

Jadi, $\frac{ur^9}{ur^3} = r^6 = \frac{512}{16} = 32, r = 2$

Karena ar^3=16, dan r = 2, maka nilai a= 2
Suku ke-12 barisan geometri tersebut adalah $U_{12}=ar^{11}=(2)(2)^{11}=4096$.

Jumlah dari suku-suku barisan geometri disebut **deret geometri atau deret ukur.** Bentuk deret geometri dapat ditunjukkan oleh persamaan

$Sn=a+ar+ar^2+ar^3+...+ar^{n-1}$ (4.9)

Atau dapat juga dituliskan sebagai $Sn=\sum_{i=1}^{n} ar^{n-1}$

Rumus deret geometri dengan suku pertama ***a*** dan rasio ***r*** adalah

$$S_n = \frac{a\left(1-r^n\right)}{(1-r)}, r < 1$$
$$atau \qquad (4.10)$$
$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, r > 1$$

Jumlah suku-suku pada persamaan (4.10) adalah terbatas, sehingga deret geometri tersebut disebut **deret geometri terhingga (*finite geometric series*).** Namun, jika jumlah suku-sukunyatdak terbatas, maka disebut **deret geometri tak terhingga (infinite geometric series).** Bentuk dari deret geometri tak terhngga adalah

$Sn=a+ar+ar^2+ar^3+...$ (4.11)

Untuk menentukan nilai deret geometri tak terhingga, dapat digunakan rumus,

$$S_n = \frac{a}{(1-r)}, \quad (4.12)$$

Contoh 4.8

Tentukan jumlah 10 suku pertama dari barisan geometri 3,9,27,81,...

Jawab

Diketahui a=3, r = 3, dan n = 10

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)},$$

$$S_{10} = \frac{3(3^{10} - 1)}{(3-1)}$$

$$= \frac{3(59048)}{2}$$

$$= 3(29524)$$

$$= 88572$$

E. Ringkasan

Konsep barisan dan deret erat kaitannya dengan penerapan permasalahan ekonomi dan bisnis terutama dalam hal keuangan dan perkembangan perusahaan. Barisan dan deret terdiri dari barisan dan deret aritmatika serta barisan dan deret geometri. barisan dan deret aritmatika sering disebut deret hitung, sedangkan barisan dan deret geometri sering disebut deret ukur. Barisan dan deret termasuk dalam cabang matematika aljabar. Barisan dan deret aritmatika dapat dilihat dari selisih antara dua suku yang saling berurutan. Sedangkan barisan dan deret geometri dapat dilihat dari rasio dua suku yang saling berurutan.

F. Soal latihan

1. Tentukan suku ke-25 dari barisan aritmatika 2, 8, 14, 20,...
2. Tentukan suku tengah barisan aritmatika 4, 7, 10, ..., 64
3. Suku ke-3 dan suku ke-5 barisan aritmatika berturut-turut 12.000 dan 5.000. Tentukan ***a*** dan ***b*** dari barisan tersebut !
4. Jika suku ke-5 suatu barsan aritmatika adalah 70, dan jumlah tujuh pertama suku barisan artmatika adalah 462, tentukan :

a. ***a*** c. U_{12}
b. ***b*** d. S_{10}

5. Debby berlari sejauh 3mil pada hari pertama. Kemudian ia meningkatkan larinya sejauh 0,25 mil setiap hari. Berapa mil jarak tempuh larnya pada hari ke-6? Berapa jumlah keseluruhan jarak tempuh dari permulaan hingga pada hari ke-10?
6. Barisan aritmatika X mempunyai nilai a=180, dan b=-10. Sedangkan barisan aritmatika Y mempunyai nilai a=45 dan b=5. Pada suku keberapa kedua barisan aritmatika tersebut mempunyai nilai yang sama?
7. Diketahui barisan geometri 15, 30, 45, 60,... Tentukan suku ke -10 dan suku ke-15 barisan geometri tersebut!
8. Jika suku ke-3 dan suku ke-7 dari suatu barisan geometri berturut-turut adalah 800 dan 204.800, tentukan suku pertama dan rasio dari barisan geometri tersebut!
9. Jika barisan geometri mempunyai U_6 =6.250 dan rasio sebesar 5, tentukan :

a. U_1 c. S_5
b. U_9 d. S_{10}

10. Tentukan banyaknya suku suatu barisan geometri yang memiliki a=3, dan r=2, serta suku ke-n 384!

11. Suatu barisan geometri A mempunyai nilai a=512, dan r=0,5. Sedangkan barisan geometri B mempunyai nilai suku ke-3 adalah 16, dan rasio 4. Pada suku keberapa kedua barisan geometri memiliki nilai yang sama?
12. Sebuah barisan aritmatika mempunya nilai a=4.484 dan b=1.234. Pada saat yang sama, terdapat suatu barisan geometri dengan nilai U_5=486 dan U_{10}=118.098. pada suku keberapa kedua barisan tersebut mempunyai nilai yang sama? Mana yang lebih besar dari nilai U_5 barisan aritmatika dan U_5 barisan geometri pada kondisi ini?

BAB V
PENERAPAN BARISAN DAN DERET

KEMAMPUAN AKHIR YANG DIHARAPKAN
Mengidentifikasi dan Menerapkan Konsep Barisan dan Deret dalam Permasalahan Ekonomi

INDIKATOR
5.1 Menentukan besar bunga majemuk dengan penerapan barisan dan deret geometri
5.2 Menerapkan konsep barisan dan deret dalam perkembangan usaha
5.3 Menerapkan konsep barisan dan deret dalam menghitung pertumbuhan penduduk

A. Pendahuluan

Prinsip-prinsip dan teori dasar dari barisan dan deret kerap digunakan dalam permasalahan bisnis dan ekonomi yang menyangkut perkembangan dan pertumbuhan usaha maupun keuangan. Dalam bidang keuangan, teori barisan dan deret dikombinasikan dalam menghitung tingkat bunga dan besar tabungan dari waktu ke waktu. Selain itu, perkembangan usaha yang mengikuti pola suatu barisan baik aritmatika maupun geometri juga dapat memanfaatkan konsep dari pembahasan pada bab ini.

B. Model Perkembangan Usaha

Masalah perkembangan usaha adalah salah satu contoh penerapan barisan dan deret. Perkembangan variabel-variabel tertentu dalam kegiatan usaha misalnya produksi, biaya, dan pendapatan yang mengikuti pola barisan aritmatika. Sehingga konsep barisan aritmatika dapat digunakan dalam analisis pemecahan masalah terkait perkembangan tersebut. Berpola mengikuti barisan aritmatika berarti variabel-variabel yang bersangkutan bertambah secara konstan dari satu waktu ke waktu.

Contoh 5.1

Sebuah perusahaan marmer "Wijaya" di kabupaten Tulungagung, menghasilkan 250 kerajinan marmer setiap bulannya. Perusahaan menambah tenaga kerja baru sehingga menyebabkan adanya peningkatan hasil produksi sebesar30 buah kerajian tiap bulannya. Jika perkembangan produksi bersifat konstan, berapa jumlah kerajinan keramik yang dapat dihasilkan pada bulan ke-6? Berapa buah kerajinan keramik yang telah dihasilkan sampai dengan bulan tersebut?

Jawab

a=250, b=30, n=6

maka U_6=a+5b=250+5(30)=250+150=400

S_6= 6/2(a+U_6)=3(250+400)=3(650)=1950

Jumlah kerajinan keramik pada bulan ke 6 adalah 400, dan jumlah kerajinan keramik yang dapat dihasilkan sampai bulan ke-6 adalah 1.950

Contoh 5.2

Sebuah perusahaan yang bergerak di bidang tekstil mendapatkan hasil penerimaan sebesar 550 juta pada tahun ketiga dan 720 juta pada tahun keenam. Apabila perkembanagan penerimaan perusahaan berpola seperti barisan aritmatika, berapakah perkembangan penerimaan tiap tahunnya? Berapa penerimaan pada tahun pertama? Pada tahun ke berapa perusahaan mendapatkan penerimaan sebesar 670 juta rupiah?

Jawab

Diketahui $U_3=a+2b=550$ (5.1)

$U_6=a+5b=640$ (5.2)

Dengan mengeleminasi persamaan (5.1) dan (5.2) didapat 3b=90, b=30

Perkembangan penerimaan pertahun sebesar 30 juta rupiah.

a+2(30)=550, maka a=490

Penerimaan pada tahun pertama 490 juta

Un=a+(n-1)b

670=490+(n-1)30

670-490=30n-30

180 +30= 30n

210 = 30 n, maka n=7

Jadi penerimaan sebesar 670 juta akan didapat pada tahun ketujuh.

C. Model Bunga Majemuk

Penerapan barisan geometri dapat diamati pada permasalahan penghitungan bunga majemuk dalam kasus simpan pinjam dan investasi. Dengan menerapkan konsep barisan geometri dapat dihitung besarnya pengembalian kredit di masa mendatang, besarnya pinjaman awal, mengukur nilai sekarang dari jumlah investasi yang akan diterima di masa mendatang.

Misalkan modal awal dinotasikan oleh P dibungakan secara majemuk dengan suku bunga pertahun setingkat I, maka jumlah akumulatif modal tersebut setelah n tahun (Fn) dapat dihitung dengan aturan sebagai berikut :

Tahun ke-1 : $F_1 = P+Pi = P(1+i)$

Tahun ke-2 : $F_2 = P(1+i)+P(1+i)i = P(1+1)^2$

Tahun ke-3 : $F_3 = P(1+i)^2+P(1+i)^2i = P(1+i)^3$

....

Tahun ke-n : Fn = P(1+i)^n+P(1+i)^{n}i = P(1+i)^n

Sehingga jumlah modal di masa mendatang mulai dari jumlah awal dapat dirumuskan:

$F_n = P\ (1+1)^n$ (5.3)

Di mana, P : Jumlah sekarang

n : jumlah tahun

i : tingkat bunga pertahun

Persamaan (5.3) dapat diartikan bahwa bunga dibayarkan sekali dalam setahun. Jika bunga dibayarkan lebih dari sekali selama setahun (misalkan x kali, masing-masing i/x tiap pembayaran) dalam setahun, maka jumlah modal di masa mendatang menjadi :

$$F_n = P(1+\frac{i}{x})^{xn}, x = \text{frekuensi pembayaran bunga dalam setahun}$$

(5.4)

Dalam dunia bisnis, Suku (1+i) dan $(1+\frac{1}{x})$ dinamakan "factor bunga majemuk" (*Compounding interest factor*), yaitu bilangan yang lebih dari 1 yang dapat digunakan untuk menghitung jumlah modal di masa mendatang dari jumlah awal yang diketahui.

Dari persamaan (5.3) dan (5.4) dapat dimanipulasi secara matematis beberapa pola untuk menghitung besarnya modal awal apabila diketahui modal di masa mendatang.

$$P = \frac{i}{(1+i)^n}F \quad \text{atau } P = \frac{i}{(1+\frac{1}{x})^{xn}}F \qquad (5.5)$$

Suku $\frac{i}{(1+i)^n}$ dan $\frac{i}{(1+\frac{1}{x})^{xn}}$ dinamakan factor diskonto (discount factor), yaitu bilangan yang kurang dari 1 yang dapat digunakan untuk menghitung modal awal dari jumlah masa yang akan datang.

Contoh 5.3

Nancy menabung di sebuah lembaga keuangan sebesar Rp. 4.500.000,00 dengan bunga 2% tiap tahun. Berapakah jumlah uang Nancy setelah 3 tahun? Jika pembayaran dilakukan 3 kali selama setahun, berapa jumlah tabungan Nancy setelah 3 tahun?

Jawab

P=4.500.000

n=3

i=2%=0.02

$F_n=P(1+i)^n$

$F_3 = 4.500.000\ (1+0.02)^3$

F3 = 4.500.000 (1.061208) = Rp. 4.775.400,00

Jika bunga dibayarkan 3 kali selama setahun, x=4,maka

$$F_n = P(1+\frac{i}{x})^{xn},$$

$$F_3 = 4.500.000(1+\frac{0.02}{4})^9$$

$$Fn = 4.500.000(1{,}005)^9$$

$$Fn = 4.500.000(1{,}0491058)$$

$$F3 = 4.706.600$$

Contoh 5.4

Tabungan Pak Toni menjadi Rp. 572.000.000,00, tiga tahun mendatang. Jika tingkat bunga yang berlaku 5% pertahun, berapakah tabungan Pak Toni semula?

Jawab

F3= 572.000.000

n=3

i = 5% = 0.05

$$P = \frac{F}{(1+i)^n}$$

$$P = \frac{572.000.000}{(1+0.05)^3}$$

$$P = \frac{572.000.000}{1,157625}$$

$$P = Rp.494.115.100,00$$

D. Model Pertumbuhan Penduduk

Penaksiran jumlah pertumbuhan penduduk suatu wilayah merupakan contoh penerapan barisan dan deret geometri yang sangat terkenal dibidang ekonomi. Hal ini diperkuat oleh seorang pakar demografi Inggris dan ekonom politik bernama Thomas Malthus yang mengemukakan bahwa pertumbuhan penduduk dunia mengikuti pola deret geometri. Secara matematis, pernyataan tersebut dapat dirumuskan sebagai berikut :

$P_t = P_1 R^{t-1}$ (5.6)

dengan R = 1 + r, P_1 = jumlah penduduk pada tahun pertama

P_t = jumlah penduduk pada tahun ke-t

r = persentase pertumbuhan per tahun

t = indeks waktu (tahun)

Contoh 5.5

Penduduk kota A berjumlah 750 ribu jiwa pada tahun 2000 dengan tingkat pertumbuhan pertahun adalah 3%. Hitunglah jumlah penduduk kota A pada tahun 2009. Jika pada tahun 2009 pertumbuannya menurun menjadi 2%, berapa jumlah penduduk 5 tahun kemudian?

Jawab

P1 = 750.000

r = 0,03

R = 1,03

$P_{\text{tahun } 2009}/P_{10}$ = 750.000 $(1.03)^{10}$

= 750.000 (1,34392)

= 1.007.937 jiwa

$P_1 = 1.007.937$ $\quad P_{5\ \text{tahun kemudian}}/P_5 = 1.007.937\ (1,02)^5$
$r = 0,02$ $\quad = 1.007.937\ (1,1040808)$
$R = 1,02$ $\quad = 1.112.844$ jiwa

E. Ringkasan

Barisan dan deret sering kita temukan penerapannya dalam permasalahan ekonomi dan bisnis terutama dalam kegiatan keuangan dan perkembangan usaha. Bidang keuangan meliputi kegiatan penentuan besarnya modal usaha, pinjaman, ataupun jumlah tabungan dalam kurun waktu tertentu. Analisis keuangan menghubungkan variabel bebas yang berupa waktu dan tingkat bunga dengan variabel terikat yang berupa nilai uang. Analisis keuangan dan pertumbuhan penduduk kerap kali menggunakan penerapan barisan dan deret ukur. sedangkan dalam analisis pertumbuhan dan perkembangan usaha seringkali menggunakan penerapan konsep barisan dan deret hitung.

F. Soal Latihan

1. Hitunglah nilai tabungan yang dibungakan secara tunggal dari masing-masing soal di bawah ini :
   a. P = Rp. 2.500.000,00; n=2 tahun; i = 5% pertahun
   b. P = Rp. 5.000.000,00; n=18 bulan; i = 6% perahun
   c. P = Rp. 1.700.000,00; n= 6 bulan; i = 7% pertahun

d. P = Rp. 3.000.000,00; n=8 bulan; i = 10% pertahun

2. Tentukan besar tabungan seseorang selama 4 tahun menggunakan bunga tabungan sederhana jika tabungan awal sebesar Rp. 55.000.000,00 dan tingkat bunga 12% pertahun!
3. Celine ingin mengetahui berapa banyak uang yang harus ia tabung di bank saat ini agar tabungnnya menjadi Rp. 45.000.000,00 selama 3 tahun dengan bung pertahun 10%!
4. Neni mendepositkan uangnya di bank sebesar Rp. 55.000.000,00, dengan tingkat bunga majemuk sebesar 12% pertahun. Tentukan besarnya deposito Neni pada khir tahun kelima?
5. Seorang pengusaha kuliner berharap 5 tahun yang akan datang tabungannya menjadi Rp. 125.000.000,00. Jika tingkat bunga yang berlaku di bank saat ini 12% per tahun dan dibayarkan secara semesteran, berapakah jumlah uang yang harus ia tabung saat ini?
6. Jumlah penduduk suatu kota mencapai 1,5 juta jiwa pada tahun 1990. Dengan besar persentase pertumbuhan sebesar 4%, hitunglah jumlah penduduk tada tahun 2000!

BAB VI
DIFERENSIAL FUNGSI

KEMAMPUAN AKHIR YANG DIHARAPKAN
Memahami dan Mengidentifikasi Konsep Turunan Fungsi
INDIKATOR
6.1 Menjelaskan Pengertian Turunan Suatu Fungsi

6.2 Kaidah – Kaidah Diferensiasi Fungsi Sederhana

6.3 Menentukan Turunan Fungsi Tingkat Tinggi

A. Pendahuluan

Analisis matematika terdiri dari beberapa cabang yang salah satunya adalah terkait kalkulus. Pembahasan diferensial fungsi termasuk dalam analisis kalkulus yang mempelajari perubahan variabel bebas suatu fungsi. Analisis diferensial dapat digunakan untuk mengetahui daerah - daerah khusus dari suatu fungsi yang dipelajari seperti titik maksimum, titik beloknya dan titik minimumnya.

Konsep diferensial juga berperan dalam permasalahan ekonomi bisnis. Sebagaimana diketahui bahwa dalam analisis ekonomi dan bisnis sangat kaitannya dengan masalah perubahan, penentuan tingkat kepuasan maksimum dan minimum. Pada bab ini akan dibahas terkait diferensial fungsi sederhana yang memiliki hanya satu variabel bebas dalam persamaanya yang meliputi, pengertiann diferensial fungsi, hakikat diferensial, kaidah-kaidah diferensial fungsi, serta penggunaanya dalam analisis titik ekstrim sebuah fungsi.

B. Pengertian Diferensial Fungsi

Konsep diferensial fungsi diturunkan dari konsep limit fungsi yang digunakan untuk menentukan apakah suatu fungsi kontinu atau diskontinu. Dikatakan fungsi kontinu (berkesinambungan) apabila dilihat dari grafik fungsinya dapat digambarkan secara utuh tanpa garis putus-putus.sedangkan fungsi diskontinu memiliki garis putus-putus dalam penggambaran grafiknya.

Syarat untuk menyatakan suatu fungsi f(x) kontinu atau diskontinu di titik x=n adalah:

a. F(n) harus terdefinisi
b. $\lim_{x \to n} f(x)$ harus ada
c. $\lim_{x \to n} f(x) =$ g(n)

Jadi, suatu fungsi akan menjadi kontinu pada satu titik jika memenuhi ketiga syarat di atas, yaitu (1) titik n harus berada dalam domain fungsi, (2) fungsi harus mempunyai limit pada titik tersebut, dan (3) limit pada titik tersebut harus sama dengan nilai f(n)pada titik tersebut. Jika salah satu syarat tidak terpenuhi, maka fungsi tersebut diskontinu pada x=n. Dari keterangan di atas, fungsi kontinu dapat ditentukan diferensialnya, sebaliknya fungsi diskontinu tidak dapat ditentukan diferensialnya.

Jika terdapat perubahan nilai x sebesar Δx pada fungsi y = f(x), maka bentuk persamaannya dapat dituliskan menjadi :

$y = f(x)$

$y + \Delta y = f(x+\Delta x)$

$\Delta y = f(x+\Delta x) - y$

$$\Delta y = f(x+\Delta y) - f(x) \qquad (6.1)$$

di mana, Δx adalah besarnya perubahan x, dan Δy adalah perubahan y dikarenakan perubahan x. Jadi, Δy muncul karena adanya Δx. Jika persamaan (6.1) kedua ruas dibagi Δx, maka diperoleh

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\left(x + \Delta y\right) - f(x)}{\Delta x} \qquad (6.2)$$

Formula $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ disebut sebagai hasil bagi perubahan atau kuosien diferensi (*differency quotient*), yang menggambarkan besar perubahan rata-rata variabel y terhadap variabel x.

Contoh 6.1

Tentukan quosien diferensi dari $y = f(x) = 3x^2 - x$

Jawab

$y = 3x^2 - x$

$y + \Delta y = 3(x+\Delta x)^2-(x+\Delta x)$

$y + \Delta y = 3(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2)-x-\Delta x$

$y + \Delta y = 3x^2+6x\Delta x+3\Delta x^2-x-\Delta x$

$\Delta y = 3x^2+6x\Delta x+3\Delta x^2-x-\Delta x-y$

$\Delta y = 3x^2+6x\Delta x+3\Delta x^2-x-\Delta x-(3x^2-x)$

$\Delta y = 6x\Delta x+3\Delta x^2-\Delta x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6x\Delta x + 3\Delta x^2 - \Delta x}{\Delta x}$$

$$= 6x + 3\Delta x - 1$$

Proses menurunkan suatu fungsi merupakan proses diferensiasi yang pada hakikatnya merupakan cara penentuan nilai suatu limit fungsi. Hasil dari proses diferensiasi disebut derivative (*derivative*). Dengan demikian, jika y=f(x) maka

Quosien diferensinya $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

dan turunan fungsinya $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Contoh 6.2

Dari persamaan $y=3x^2-x$

Diperoleh quosien diferensi $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x - 1$ (pada contoh sebelumnya)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\Delta x - 1) = 6x + 3(0) - 1 = 6x - 1$$

Jadi, turunan atau derivative dari fungsi $y = 3x^2 - x$ adalah

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x - 1$$

Cara penulisan notasi turunan (derivative) dari suatu fungsi dapat dilakukan dengan beberapa cara. Jika fungsi y = f(x), maka penulisan notasinya dapat ditunjukkan oleh

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv y' \equiv f'(x) \equiv y_x \equiv f_x(x) \equiv \frac{dy}{dx} \equiv \frac{df(x)}{\Delta x} \qquad (6.3)$$

Semua penulisan pada persamaan (6.3) memiliki arti yang sama, yaitu melambangkan turunan dari y=f(x). Dari beberapa cara penulisan notasi seperti pada persamaan (6.3), yang paling lazim digunakan untuk menunjukkan turunan fungsi adalah bentuk $\frac{dy}{dx}$. Dalam bab fungsi, Quosien diferensi tidak lain adalah kemiringan garis atau slope atau gradien garis atau kurva y = f(x).

C. Rumus – Rumus Diferensiasi Fungsi

Dalam menentukan turunan suatu fungsi, dapat dilakukan dengan cara (1) menentukan quosien diferensiasi, (2) menentukan nilai limit quosien diferensi untuk perubahan variabel bebas yang mendekati nol. Untuk lebih jelasnya, dapat ditunjukkan dengan langkah-langkah berikut:

1. Misalkan fungsi aslinya y=f(x)
2. Masukkan Δx dan Δy untuk mendapat persamaan
   y+ Δy =f(x+ Δx)
3. Memindahkan y ke ruas kanan, sehingga diperoleh
   Δy = f(x+ Δx)-f(x)
4. Bagi kedua ruas dengan Δx ,sehingga diperoleh quosien diferensi nya
   $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
5. Tentukan limitnya untuk $\Delta x \to 0$, sehingga diperoleh turunan fungsinya
   $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Berikut disajikan beberapa kaidah-kaidah dirensiasi berbagai bentuk fungsi beserta contoh-contohnya:

1. Diferensiasi fungsi konstan
   Jika y=k, dengan k adalah suatu konstanta, maka $\frac{dy}{dx} = 0$

   Contoh 6.3

   y=-2, maka $\frac{dy}{dx} = 0$
2. Diferensiasi fungsi pangkat
   Jika $y=x^n$, maka $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

   Contoh 6.4

   $y=x^2$, maka $\frac{dy}{dx} = 2x^{2-1}=2x$

3. Diferensiasi perkalian suatu konstanta dengan fungsi

   Jika y=ku, dengan u=g(x), maka $\frac{dy}{dx}$ =k $\frac{du}{dx}$

   Contoh 6.5

   y = -3x², maka $\frac{dy}{dx}$ = (-3)(2x)$^{2-1}$ = -6x

4. Diferensiasi pembagian suatu konstanta dengan fungsi

   Jika y=$\frac{k}{u}$, dengan u=g(x), maka $\frac{dy}{dx} = -k\frac{du/dx}{u^2}$

   Contoh 6.6

   y = $\frac{2}{x^3}$, maka $\frac{dy}{dx} = -\frac{2(3x^2)}{(x^3)^2} = -\frac{6x^2}{x^6}$

5. Diferensiasi penjumlahan/pengurangan fungsi

   Jika y = $u \pm v$, dengan u=g(x) dan v=h(x), maka

   $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$

   Contoh 6.7

   y = x²+3x,

   $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$ = 2x+3

6. Diferensiasi perkalian fungsi

   Jika y=uv, dengan u=g(x) dan v=h(x), maka $\frac{dy}{dx}$ =u

   $\frac{du}{dx} + v\frac{dv}{dx}$

   Contoh 6.8

   y = (4x³)(-2x)

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = (4x^3)(-2) + (-2x)(12x^2)$$

$$= -8x^3 - 24x^3$$

$$= -32x^3$$

7. Diferensiasi pembagian fungsi

   Jika y= $\frac{u}{v}$, dengan u-g(x) dan v=h(x)

   Maka $\frac{dy}{dx} = \frac{u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}}{v^2}$

   Contoh 6.9

   y= $\frac{4x^3}{-2x}$

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}}{v^2}$$

   $$= \frac{4\mathrm{x}^3(-2) - (-2x)(12x^2)}{(-2x)^2}$$

   $$= \frac{-8\mathrm{x}^3 + 24x^3}{4x^4}$$

   $$= \frac{-8}{\mathrm{x}}$$

8. Diferensiasi fungsi komposit

   Jika y=f(u), dengan u=g(x), dengan kata lain y=f(g(x)), maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$

   Contoh 6.10

   y=(2x3+3)3, dengan u=2x3+3, dapat dikatakan y=u3

   maka, $\frac{du}{dx} = 6x^2, \frac{dy}{du} = 3u^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$
$$= 3\mathrm{u}^2(6x^2)$$
$$= 18\mathrm{x}^2(u^2)$$
$$= 18x^2(2x^3 + 3)$$
$$= 36x^5 + 54x^2$$

9. Diferensiasi fungsi Berpangkat
   Jika $y=u^n$, dengan u=g(x) dan n adalah suatu konstanta,
   Maka $\frac{dy}{dx} = nu^{n-1}.\frac{du}{dx}$

   Contoh 6.11

   $y=(-2x^5 - 6)^3$

   misalkan $u=(-2x^5 - 6)$, maka $\frac{du}{dx} = -10x^4$

   $$\frac{dy}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$
   $$= 3(-2x^5 - 6)^{3-1}.(-10x^4)$$
   $$= -30x^4(-2x^5 - 6)^2$$

10. Diferensiasi fungsi Logaritmik
    Ika y= ${}^a\log x, maka\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\ln a}$

    Contoh 6.12

    y= ${}^2\log 5, \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\ln a} = \frac{1}{5\ln 2}$

11. Diferensiasi komposit logaritmik
    Jika y= ${}^a\log e$, dengan u=h(x), maka $\frac{dy}{dx}, = \frac{{}^a\log u}{u}.\frac{du}{dx}$

    Contoh 6.13

    y= $\log\frac{2x-5}{x-6}$,

misalkan u=$\frac{2x-5}{x-6}$, , maka

$$\frac{du}{dx}=\frac{2(x-6)-(2x-5)}{(x-6)^2}=\frac{-1}{(x-6)^2},$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{{}^a\log e}{u}.\frac{du}{dx}$$

$$=\frac{\log \mathrm{e}}{\left(\frac{2x-5}{x-6}\right)}.\frac{-1}{(x-6)^2}$$

$$=\frac{-\log \mathrm{e}}{(2\mathrm{x}-5)(\mathrm{x}-6)}=\frac{-\log e}{(2x^2-17x+30)}$$

12. Diferensiasi fungsi Komposit Logaritmik Berpangkat

Jika y=(^{a}log u)^n, dengan u=g(x) dan n suatu konstanta,

Maka $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{{}^a\log e}{u}.\frac{du}{dx}$

Contoh 6.14

y=(log 6x^3)^3

misalkan u=6x^3, $\frac{du}{dx}=18x^2$

$$\frac{dy}{dx}=3(\log 6x^3)^2\left(\frac{\log e}{6x^3}\right)(18x^2)$$

$$=\frac{54\mathrm{x}^2(\log 6x^3)^2\log e}{6x^3}$$

$$=\frac{9(\log 6x^3)^2\log e}{x}$$

13. Diferensiasi fungsi Logaritmik Napier (logaritma natural)

Jika y=ln x, maka $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$

Kaidah fungsi logaritmik ini merupakan bentuk khusus dari fungsi logaritmik, yakni dalam hal logaritmanya berbasis *e*. $\ln e \equiv {}^{e}\log x$ dan $\ln e \equiv {}^{e}\log e = 1$. Jadi, jika y=ln x=^{e}log x, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}$

Contoh 6.15

y=ln 2, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$

14. Diferensiasi fungsi Komposit Logaritmik Napier

    Jika y= ln u, dengan u=g(x), maka $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}.\frac{du}{dx}$

    Contoh 6.16

    y=ln$\left(\frac{x^2-4}{x+2}\right)$

    misalkan u= $\left(\frac{x^2-4}{x+2}\right)$, $\frac{du}{dx} = \frac{2x(x+2)-(x^2-4)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+4}{(x+2)^2}$

    $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}.\frac{du}{dx}$

    $= \left(\frac{x^2-4}{x+2}\right).\frac{(x^2+4x+4)}{(x+2)^2}$

    $= \frac{(\text{x - 2})(x^2+4x+4)}{(x+2)^2}$

    $=$ x - 2

15. Diferensiasi fungsi Komposit Logaritmik Napier Berpangkat

    Jika y=(ln u)^{n}, dengan u=g(x) dan n suatu konstanta

    Maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{1}{u}.\frac{du}{dx}$

Contoh 6.17

$y=(\ln 6x^3)^4$

misalkan $u=6x^3$, $\frac{du}{dx}=18x^2$

$$\frac{dy}{dx}=4\,(\ln 6x^3)^3\left(\frac{1}{6x^3}\right).18x^2$$

$$=\frac{12}{x}(\ln 6x^3)^3$$

16. Diferensiasi fungsi Eksponensial

Jika $y=a^x$, dengan a suatu konstanta, maka $\frac{dy}{dx}=a^x \ln a$

Contoh 6.18

$y=7^x$, $\frac{dy}{dx}=a^x \ln a = 7^x \ln 7$

dalam kasus $y=e^x$, maka $\frac{dy}{dx}=e^x$, karena $\ln e = 1$

17. Diferensiasi fungsi Komposit Eksponensial

Jika $y=a^u$, di mana $u=g(x)$, maka $\frac{dy}{dx}=a^u \ln a \frac{du}{dx}$

Contoh 6.19

$y=5^{2x-5}$

misalkan $u=2x-5$, maka $\frac{du}{dx}=2$

$$\frac{dy}{dx}=a^x \ln a \frac{du}{dx}$$

$$=5^{2x-5}(\ln 5)(2)$$

$$=10^{2x-5} \ln 5$$

18. Diferensiasi fungsi Kompleks

Jika $y=u^v$, dengan $u=g(x)$ dan $v=h(x)$

Maka $\frac{dy}{dx}=vu^{v-1}.\frac{du}{dx}+u^{n.} \ln u.\frac{dv}{dx}$

Penyelesaian diferensiasi fungsi kompleks dapat dilakukan dengan melogaritmakan fungsi, lalu mendeferensiasikan masing-masing ruasnya, seperti di bawah ini:

$$y = u^v$$

$$\ln y = v \ln u$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = v\frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \ln u \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = (vu^{-1}\frac{du}{dx} + \ln u \frac{dv}{dx})u^v, y = u^v$$

$$\frac{dy}{dx} = vu^{-1}\frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}$$

D. Ringkasan

Pembahasan diferensial pada ilmu Matematika terkait dengan tingkat perubahan suatu fungsi sehubungan dengan perubahan kecil dalam variabel bebasnya. Diferensial termasuk dalam cabang matematika yaitu kalkulus. Diferensial dapat pula digunakan untuk mengetahui kedudukan suatu garis apakah memiliki titik maksimum, titik belok, ataukah titik minimum. Analisis diferensial diterapkan dalam permasalahan ekonomi dan bisnis dalam mengetahui titik maksimum dan minimum dari kepuasan konsumen. Beberapa konsep kalkulus diferensial dari mulai fungsi yang sederhana hingga tingkat tinggi banyak dimanfaatkan dalam penyelesaian permasalahan ekonomi dan bisnis yang sangat beragam.

E. Soal Latihan

Tentukan diferensiasi dari fungsi-fungsi berikut:

1. $y = -2x^4 - 5x^3 + 4x+1$
2. $y = 10x - 4x^{-1} + 3x^{-2}$
3. $y = (x^3+5)(2x-4)$
4. $y = (3x^{-2}+1)^2$
5. $y = \dfrac{(-2x^5)}{(4x+2)}$
6. $y = (2x-4)\ \dfrac{(3x^2+1)}{(x^2)}$
7. $y = (-2x^3 - 5x^2 + 4)^{-2}$
8. $y = \left(\dfrac{3x^2+1}{x^2}\right)^4$

9. $y = \log \dfrac{x+7}{x-6}$

10. $y = \log (8x^3+6)$

11. $y = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)$

12. $y = (\ln 5x^2)^3$

13. $y = 9^x e^x$

14. $y = 2e^{2x}$

15. $y = x^3e^{x+5}$

BAB VII
PENERAPAN DIFERENSIAL FUNGSI

KEMAMPUAN AKHIR YANG DIHARAPKAN
Memahami dan menerapkan konsep turunan fungsi dalam masalah ekonomi bisnis
INDIKATOR
7.1 Menerapkan diferensial fungsi pada masalah Elastisitas Permintaan, Penawaran, dan Produksi
7.2 Menerapkan diferensial fungsi pada masalah Utilitas Marginal, Penerimaan Marginal, Biaya Marginal, dan Produk Marginal
7.3 Menerapkan diferensial fungsi pada masalah Hubungan Biaya Marginal dengan Biaya Rata-Rata
7.4 Menerapkan diferensial fungsi pada masalah Hubungan Produk Marginal dan Produk Rata-Rata

A. Pendahuluan

Konsep diferensial fungsi sederhana sering diterapkan dalam permasalahan elastisitas, konsep nilai marginal dan konsep optimisasi. Pada penerapan elastisitas akan diarahkan pada besar nilai elastisitas permintaan, penawaran, serta produksi. Sedangkan pada penerapan nilai marginal akan dibahas terkait pembentukan fungsi marginal dan penghitungan nilai marginal dari beberapa variabel ekonomi. Selain itu juga akan dibahas penerapan diferensial terkait hubungan antara nilai marginal dan nilai rata-rata fungsi biaya dan fungsi produksi.

B. Elastisitas

Definisi elastisitas suatu fungsi y = f(x) ditunjukkan oleh :

$$\eta = \frac{E_y}{E_x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta y / y)}{(\Delta x / x)} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} \qquad (7.1)$$

Elastisitas fungsi y = f(x) merupakan limit perbandingan antara perubahan nilai y terhadap x atau dapat dikatakan bahwa elastsitas adalah perbandingan antara persentase perubahan variabel y terhadap persentase perubahan variabel x.

7.1.1 Elastsitas Permintaan

Elastisitas permintaan adalah suatu konstanta yang mencerminkan besarnya jumlah permintaan akan barang akibat adanya perubahan harga, atau dapat dikatakan bahwa elastisitas permintaan mencerminkan perbandingan persentase perubahan jumlah permintaan akan barang yang diminta terhadap persentase perubahan harga barang. Jika fungsi permintaan dinyatakan oleh $Q_d = f(P)$, maka elastisitas permintaanya dirumuskan dengan

$$\eta_d = \frac{\%\Delta Q_d}{\%\Delta P} = \lim_{\Delta P \to 0} \frac{(\Delta Q_d / Q_d)}{(\Delta P / P)} = \frac{dQ_d}{dP} \cdot \frac{P}{Q_d}$$

(7.2)

dengan dQ_d/dP adalah Q'_d atau f'(P)

Permintaan terhadap suatu barang bersifat elastik jika $|\eta_d| > 1,$ artinya bahwa jika harga barang tersebut berubah beberapa persen maka jumlah permintaan terhadap barang tersebut akan berubah berlawanan dengan persentase yang lebih besar dari persentase perubahan harganya. Sedangkan permintaan barang akan bersifat elastik-uniter jika $|\eta_d| = 1,$ dan bersifat inelastik jika $|\eta_d| < 1.$

Contoh 7.1

Diketahui fungsi permintaan $Q_d = 6 - 2P^2$. Tentukan elastisitas permintaannya saat P=2.

Jawab

$Q_d=6-2P^2$

$Q'_d=-4P$

$$\eta_d = \frac{dQ_d}{dP}.\frac{P}{Q_d} = -4P.\frac{P}{6-2P^2}$$

$$= \frac{-4P^2}{6-2P^2}$$

$$= \frac{-4(4)}{6-2(4)}$$

$$= \frac{-16}{-2}$$

$$= 8\,(elastik)$$

7.1.2 Elastisitas Penawaran

Elastisitas penawaran adalah suatu konstanta yang mencerminkan besarnya perubahan jumlah barang yang ditawarkan dikarenakan adanya perubahan harga barang. Selanjutnya, elastisitas penawaran dapat dikatakan sebagai rasio persentase perubahan jumlah barang yang ditawarkan terhadap persentase perubahan harga. Jika fungsi penawaran ditunjukkan oleh rumus $Q_s=f(P)$, maka elastisitas penawarannya adalah :

$$\eta_s = \frac{\%\Delta Q_s}{\%\Delta P} = \lim_{\Delta P \to 0} \frac{(\Delta Q_s / Q_s)}{(\Delta P / P)} = \frac{dQ_s}{dP}.\frac{P}{Q_s} \qquad (7.3)$$

dengan dQ_s/dP adalah Q'_s atau f'(P)

Penawaran terhadap suatu barang dikatakan bersifat elastik jika $\eta_s > 1$, bersifat elastik-uniter jika $|\eta_d| = 1$, dan bersifat inelastik jika $|\eta_d| < 1$. Barang yang ditawarkan akan bersifat inelastic andaikan persentase harga barang berubah , maka penawarannya (searah) lebih kecil dari persentase perubahan harganya.

Contoh 7.2

Diketahui fungsi penawaran suatu barang Q_s=-150+5P^2. Tentukan besarnya elastisitas penawarannya jika P=5 dan P=10!

Jawab

Q_s=-150+7P^2

Q'_s=14P

$$\eta_s = \frac{dQ_s}{dP}.\frac{P}{Q_s} = 14P.\frac{P}{-150+7P^2}$$

$$= \frac{14P^2}{-150+5P^2}$$

$$\mathrm{P} = 5$$

$$\eta_s = \frac{14(25)}{-150+7(25)}$$

$$= \frac{350}{25}$$

$$= 14(elastik)$$

$$P = 10$$

$$\eta_s = \frac{14(100)}{-150+7(100)}$$

$$= \frac{1400}{550}$$

$$= 2{,}5\ \text{(elastik)}$$

7.1.3 Elastisitas Produksi

Elastisitas Produksi adalah suatu konstanta yang mencerminkan besarnya perubahan jumlah hasil produksi (*output*) akibat perubahan jumlah masukan (*input*) yang digunakan dalam produksi. Selanjutnya, elastisitas produksi dapat diartikan sebagai rasio persentase jumlah hasil produksi terhadap persentase jumlah masukan. Misalkan jumlah output dilambangkan oleh P dan jumlah input lambangkan oleh X, sedangkan fungsi produksi dinyatakan oleh P = f(X), maka elastisitas produksinya menjadi :

$$\eta_P = \frac{\%\Delta P}{\%\Delta X} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{(\Delta P / P)}{(\Delta X / X)} = \frac{dP}{dX}.\frac{X}{P} \qquad (7.4)$$

dengan dP/dX adalah produk marginal dari X (P' atau f'(X)).

Contoh 7.3

Diketahui fungsi produksi P = $7X^2 - 2X^3$. Hitunglah elastisitas produksinya pada tingkat penggunaan input sebanyak 4 dan 8 unit.

Jawab

P = $7X^2 - 2X^3$, maka P' = $14X - 6X^2$

$$\eta_P = \frac{dP}{dX} \cdot \frac{X}{P}$$

$$= \left(14X - 6X^2\right)\frac{X}{7X^2 - 2X^3}$$

$\textit{saat}$ X = 4, maka

$$\eta_P = \frac{14(16) - 6(64)}{7(16) - 2(64)}$$

$$= \frac{224 - 384}{112 - 128}$$

$$= \frac{-160}{-16}$$

$$= 10$$

$\textit{saat}$ X = 8, maka

$$\eta_P = \frac{14(64) - 6(512)}{7(64) - 2(512)}$$

$$= \frac{896 - 3072}{448 - 1024}$$

$$= \frac{-2176}{-576}$$

$$= 3{,}8$$

C. Marginalitas

Marginal berasal dari kata margin yang artinya adalah batas/tepi. Dalam kegiatan ekonomi, marginal merupakan suatu kata yang berarti tambahantal dan Q dalam kegiatan ekonomi. Kegitan ekonomi mencakup produksi, distribusi, dan konsumsi kadangkala memerlukan tambahan dalam hal untuk mencukupi kebutuhan masyarakat luas.

7.2.1 Biaya Marginal

Untuk menghasilkan tambahan satu unit produk diperlukan tambahan biaya yang harus dikeluarkan. Tambahan biaya inilah yang disebut dengan ***biaya marginal***. Secara matematis, fungsi biaya marginal merupakan turunan pertama dari fungsi biaya total. Misalkan fungsi biaya total ditunjukkan oleh C = f(Q) dengan C adalah biaya dan Q menunjukkan jumlah barang yang diproduksi, maka rumus biaya marginalnya adalah:

$$MC = C' = \frac{dC}{dQ} \qquad (7.5)$$

Fungsi biaya total nonlinier biasanya adalah fungsi kubik, sehingga seperti ditunjukkan oleh contoh di bawah ini, MC mencapai nilai minimum tepat pada saat kurva biaya total (C) terletak di posisi titik beloknya.

Contoh 7.4

Diketahui fungsi biaya total : $C = f(Q) = 2Q^3 - 4Q^2 + Q + 5$. Tentukan biaya marginal saat Q = 2

Jawab

$C=f(Q)=2Q^3 - 4Q^2 + Q + 5$

$MC = C' = 6Q^2 - 8Q + 1$

Saat Q=2, maka

$MC = 6(4)-8(2)+1$

$= 24-16+1$

$= 9$

7.2.2 Penerimaan Marginal

Penerimaan Marginal adalah bertambahnya jumlah penerimaan akibat adanya tambahan satu unit produk yang dihasilkan atau terjual. Secara matematis, diferensiasi pertama dari fungsi penerimaan total akan menghasilkan fungsi penerimaan marginal. Misalkan fungsi penerimaan total dinyatakan dengan f(Q) = R dengan R menunjukkan total penerimaan dan Q adalah jumlah barang yang dihasilkan, maka penerimaan marginal dirumuskan oleh :

$$MR=R'=\frac{dR}{dQ} \qquad (7.6)$$

Fungsi penerimaan total nonliner berbentuk parabolic (fungsi kuadrat), maka fungsi penerimaan marginalnya berbenruk fungsi linier. Grafik penerimaan marginal (MR) selalu mendekati nol tepat pada saat kurva penerimaan total (R) berada pada posisi puncaknya. Hal ini dapat dilihat pada contoh soal di bawah

Contoh 7.5

Fungsi permintaan total yaitu P=4-2Q. Tentukan penerimaan marginalnya dan gambarkan kurvanya!

Jawab

Penerimaan total

R=P.Q

= (4-2Q)Q

= $4Q-2Q^2$

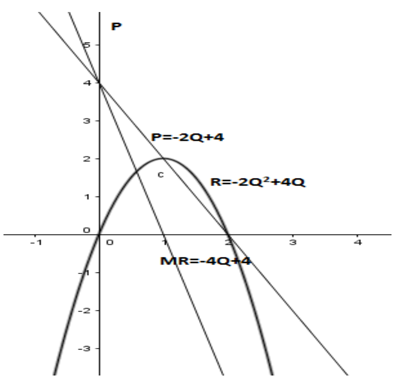
Penerimaan marginal

MR = R'

= 4-4Q

Pada saat MR = 0,maka Q=1 dan P=2

R = 4(1)-2(1) = 2



Gambar 7.1 kurva penerimaan marginal

7.2.3 Utilitas Marginal

Utilitas marginal adalah tambahan utilitas yang diperoleh konsumen karena adanya satu unit barang tambahan yang dikonsumsinya. Secara matematis, diferensiasi pertama fungsi utilitas total akan menghasilkan fungsi utilitas marginal. Misalkan fungsi utilitas total dinyatakan dengan U = f(Q) dengan U melambangkan utilitas total dan Q adalah jumlah barang yang dikonsumsi, maka utilitas marginalnya adalah

$$MU = U' = \frac{dU}{dQ} \qquad (7.7)$$

Umumnya fungsi utilitas total nonliner adalah parabolic (fungsi kuadrat), maka fungsi utilitas marginalnya adalah fungsi linier. Kurva utilitas marginal (MU) selalu mendekati nol tepat pada saat kurva utilitas total (U) berada pada posisi puncaknya. Hal ini dapat dilihat pada contoh soal di bawah

Contoh 7.6

Diketahui fungsi utilitas total U = f(Q) = 10Q – 5Q². Tentukan utilitas marginalnya dan gambarkan kurvanya!

Jawab

$U = 10Q - 5Q^2$

$MU = 10 - 10Q$

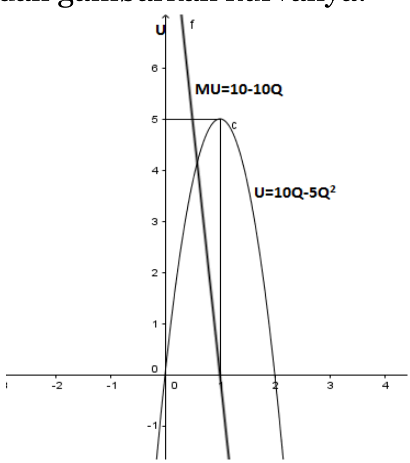
U maksimum saat MU=0

MU =0, maka Q=1

$U_{maksimum} = 10(1) - 5(1)$

$= 10 - 5$

$= 5$



Gambar 7.2 kurva utlitas marginal U=f(Q)= 10Q – 5Q²

7.2.4 Produk Marginal

Produk marginal adalah jumlah produk tambahan yang dihasilkan karena terdapat tambahan satu unit factor produksi yang digunakan. Secara matematis, fungsi produk marginal merupakan turunan pertama dari fungsi produk total. Misalkan fungsi total produk dinyatakan dalam P = f(Q) dengan P adalah jumlah total produk dan X adalah jumlah input, maka fungsi produk marginalnya adalah

$$MP = P' = \frac{dP}{dX} \qquad (7.8)$$

Contoh 7.7

Diketahui fungsi produk total adalah $P=f(X)=3X^2 - X^3$. Tentukan fungsi produk marginalnya dan gambarkan kurvanya!

Jawab

Produksi total

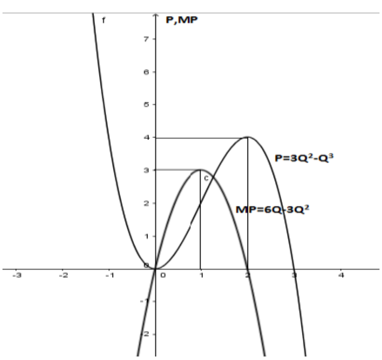
$P = 3X^2 - X^3$

Produksi marginal

$MP = P' = 6X - 3X^2$

$P_{maksimum}$ saat $P'=0$, maka $X=2$

dan $P_{maksimum}= 4$P terletak di titik belok kurva dan MP maksimum terletak saat $P'' = (MP)' = 0$, maka $X=1$



Gambar 7.3 Kurva Produk Marginal

D. Hubungan Biaya Rata-Rata dengan Biaya Marginalitas

Secara teori, biaya rata – rata dan biaya marginal memiliki hubungan erat di mana saat biaya rata-rata mencapai nilai minimum, maka biaya rata-rata minimum tersebut akan sama dengan biaya marginal. Jika dilihat dari grafiknya, maka hubungan tersebut akan ditunjukkan oleh perpotongan kurva biaya marginal dengan biaya rata-rata saat posisi minimum pada kurva biaya rata-rata. Secara matematis, hubungan tersebut dapat ditunjukkan oleh persamaan berikut ;

Misalkan biaya total dinyatakan dengan C = f(Q), maka

Biaya marginal : MC = C' = dC/dQ

Biaya rata-rata : AC = C/Q

Syarat agar AC bernilai minimum adalah turunan pertamanya harus nol. Menurut kaidah diferensiasi, jika

$$y = \frac{u}{v}, maka\ y' = \frac{u'v - uv'}{(v)^2}$$

$$AC = \frac{C}{Q}, maka\ (AC)' = \frac{C'Q - CQ'}{(Q)^2} = \frac{C'Q - C}{(Q)^2}$$

(CQ'=C, jika Q=Q, maka Q'=dQ/dQ=1)

Syarat agar AC minimum, maka (AC)'=0

$$\frac{C'Q - C}{(Q)^2} = 0$$

$$C'Q - C = 0$$

$$C'Q = C$$

$$C' = \frac{C}{Q}$$

Karena C' = MC dan C/Q = AC, maka dapat ditentukan hubungan biaya marginal dan biaya rata-rata, yaitu dengan ketentuan

Pada posisi AC minimum, MC = AC, $\frac{dC}{dQ} = \frac{C}{Q}$ (7.9)

Contoh 7.8

Diketahui fungsi biaya total $C=Q^3-6Q^2+12Q$. Buktikan bahwa nilai minimum dari biaya rata-rata sama dengan biaya marginalnya dan gambarkan grafiknya!

Jawab

$C = Q^3- 6Q^2+12Q$

$MC = 3Q^2 - 12Q+12$

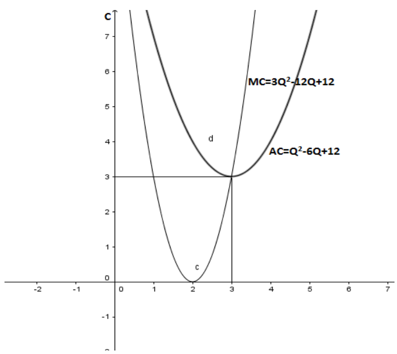
$AC = C/Q = Q^2-6Q+12$

$(AC)' = 2Q-6$

$(AC)' = 0$, maka $Q = 3$

Saat $Q = 3$,

$$\left.\begin{array}{l} MC=3(9)-12(3)+12=3 \\ AC=9-6(3)+12=3 \end{array}\right\} \quad MC=AC_{minimu}$$



Gambar 7.4 Hubungan Biaya Margnal dan Biaya Rata-rata

E. Hubungan Produk Marginal Dengan Produk Rata-Rata

Analog dengan hubungan biaya rata-rata dan biaya marginal, secara teori terdapat hubungan yang sebanding antara produk marginal dan produk rata – rata. Pada saat produk rata – rata mencapai nilai maksimum, maka produk marginal akan bernilai sama dengan produk rata – rata di titik tersebut.. Andaikan fungsi total produk dinyatakan dengan P = f(X), maka

Produk marginal : MP = P'= dP/dX

Produk rata-rata : AP = P/X

$$AP = \frac{P}{X}, maka\,(AP)' = \frac{P'X - PX'}{(X)^2} = \frac{P'X - P}{(X)^2}$$

(PX'=P, karena jika X=X, X'=dX/dX=1)

Syarat agar AP maksimum, maka (AP)'=0

$$\frac{P'X - P}{(X)^2} = 0 \rightarrow P'X - P = 0 \rightarrow P'X = P \rightarrow P' = \frac{P}{X}$$

Karena P'=MP dan P/X=AP, maka dapat ditentukan hubungan biaya marginal dan biaya rata-rata, yaitu

Pada posisi AP maksimum, MP=AP, $\frac{dP}{dX} = \frac{P}{X}$ (7.10)

Contoh 7.9

Diketahui fungsiproduksi total $P=6X^2-X^3$. Buktikan bahwa produk rata-rata maksimum sama dengan produk marginal dan gambarkan grafiknya!

Jawab

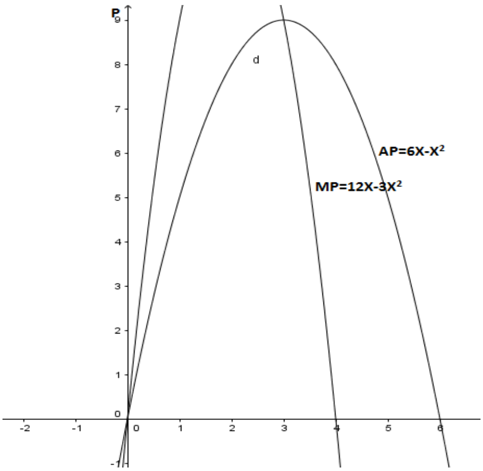
$P = 6X^2-X^3$

$MP = P' =12X-3X^2$

$AP = P/X = 6X-X^2$

$(AP)'= 6-2X$

AP mencapai maksimum jika (AP)'=0, maka X=3



Pada saat X=3, maka

$$\left.\begin{aligned} MP &= 12(3)-3(9)=9 \\ AP &= 6(3)-(9)=9 \end{aligned}\right\} MP=AP$$

Gambar 7.5 Hubungan Produk Marginal dan Produk Rata-rata

F. Ringkasan

Kalkulus merupakan salah satu cabang matematika yang membahas terkait analisis tingkat perubahan dari suatu fungsi. Analisis ini sangatlah penting dalam penerapan ekonomi dan bisnis, karena nilai dari variabel-variabel ekonomi dan bisnis sewaktu waktu dapat berubah-ubah sesuai situasi dan kondisi.

Konsep diferensial masuk dalam matematika kalkulus yang penerapannya dapat dilihat untuk menghitung biaya marginal ataupun penerimaan marginal. Selain itu dapat pula digunakan untuk mengetahui tingkat elastisitas permintaan, penawaran, dan produksi. Hubungan antara biaya marginal dan biaya rata-rata serta hubungan antara penerimaan marginal dan penerimaan rata-rata juga dapat ditentukan dengan penerapan diferensial.

G. Soal Latihan

1. Diketahui beberapa fungsi permitaan berikut :
    - P = 1500 - 0,02Q, Q=1000
    - P = 75 – 0,5Q, Q=30
    - P = 1,5 Q, Q=150
    - P = 64, Q=200
    - P = 250 – 0,01, Q= 400

    Tentukan harga dari masing-masing fungsi permintaan di atas pada titik yang telah ditentukan!
2. Tentukanlah elastisitas permintaan berikut terhadap harga jika:

    a. $Q = \dfrac{64}{P^{\frac{3}{2}}}$

    b. $Q = \dfrac{8}{P^3}$

3. Tetukanlah elastisitas harga permintaan pada fungsi $P = (Q - 5)^4$ pada titik Q=4 dan Q=5! Tentukan apakah elastis, elastis uniter, ataukah inelastic!
4. Tentukan penerimaan marginal maksimum dari beberapa fungsi penerimaan total berikut !
   a. $R = -0{,}06Q^2 + 0{,}2Q$,
   b. $R = -0{,}03Q^2 + 21Q$
   c. $R = 420Q - 3Q^2$
   d. $R = 20Q - 0{,}25Q^2$
   e. $R = 250Q - 0{,}1Q^2$
5. Jika diketahui fungsi biaya total $C=6+4Q+Q^2$, (a) tentukan biaya marginal dan biaya rata-rata minimum, dan (b) gambarkan kurva biaya marginal dan biaya rata-rata dalam satu diagram!
6. Diketahui fungsi biaya rata-rata $AC=25-8Q+Q^2$.
   a. Tentukanlah biaya marginal dari fugsi tersebut
   b. Buktikan bahwa pada saat biaya rata- rata berada di titik minimum, maka nilainya akan sama dengan biaya marginal di titik tersebut
   c. Gambarkan kurva biaya marginal dan biaya rata-rata dalam satu diagram

TENTANG PENULIS

Ranti Kurniasih, lahir di Tulungagung 32 tahun yg lalu. Anak ketiga dari 4 bersaudara pasangan H. Achsan dan Hj.Widayanin ini adalah lulusan magister pendidikan matematika Universitas Negeri Malang tahun 2015. Saat ini mengabdi di dunia pendidikan menjadi dosen salah satu kampus di kota reog yaitu Universitas Muhammadiyah Ponorogo. Selain mengajar ia juga aktif menulis dan memberikan pengajaran membaca tulis alqur'an bagi dosen dan karyawan di Universitas Muhammadiyah Ponorogo.