BAB II

KAJIAN PUSTAKA

1.1 Teori permainan

Teori permainan merupakan sebuah teori yang bertujuan untuk membantu memahami situasi dimana pengambil keputusan berinteraksi (Osborne, J. M., 2000). Teori permainan juga didefinisikan sebagai analisis umum mengenai strategi interaksi. Teori permainan berfokus pada penentuan strategi optimal dimana setiap pengambil keputusan mengambil keputusan secara rasional dan berusaha saling membaca strategi lawan (James. et al., 2000). Myerson dalam Nicola et al. (2015) mendefinisikan teori permainan sebagai studi tentang model matematika dari konflik dan kooperasi pengambil keputusan yang rasional dan intelektual. Sehingga, teori permainan merupakan studi mengenai pengambilan keputusan yang bertujuan menentukan strategi optimal.

1.1.1 Permainan

Objek dalam studi teori permainan adalah permainan itu sendiri. Permainan dalam kehidupan sehari-hari merupakan kegiatan kompetitif dimana pemain bersaing satu sama lain berdasarkan serangkaian aturan. Baron, E. N. (2013) menjelaskan bahwa permainan merupakan aktivitas yang bersifat kompetitif yang dimainkan oleh sejumlah pemain, memiliki serangkaian strategi, dan memiliki hasil yang secara kuantitatif menggambarkan hasil dari sejumlah permainan dalam hal menang atau kalah. Strategi yang digunakan setiap pemain bisa sangat rumit karena strategi ditentukan sejak awal permainan. Strategi menggambarkan apa yang akan pemain perbuat dalam setiap situasi yang mungkin terjadi.

Secara lebih rinci Nitti, D Nicola (2014) menjelaskan konsep inti teori permainan sebagai berikut:

1. Permainan dan Pemain

   Objek studi teori permainan adalah permainan itu sendiri. Permainan merupakan model formal dari sebuah situasi interaktif dimana terdapat setidaknya satu pemain dapat memaksimalkan pemanfaatannya sebagai respon dari tindakan pemain lain. Sebuah permainan umumnya dimainkan oleh dua atau lebih pemain, tetapi beberapa memerlukan satu pemain saja (permainan pengambilan keputusan). Definisi formal suatu permainan mencakup informasi tentang pemain, strategi yang tersedia, dan hasil outputnya (*payoff*)

2. Rasionalitas

   Dalam studi teori permainan, diasumsikan bahwa pemain adalah ‘rasional’ artinya pemain memiliki preferensi dan tepat. Jika diterapkan dalam suatu masalah, asumsi ini bisa saja menjadikan permainan berbeda dengan realita yang ada.

3. Hasil

   Dalam sebuah permainan *payoff* merupakan angka yang menggambarkan ‘motivasi’ pemain. *Payoff* dapat berupa keuntungan maupun menyatakan hitungan kemenangan dan kekalahan.

4. Strategi

   Strategi merupakan rangkaian gerakan yang pemain akan ikuti selama permainan.

Secara matematis sebuah permainan memiliki:

1. Sejumlah pemain, $P = \{1, 2, \ldots, p\}$
2. Pemain N memiliki serangkaian gerakan yang tersedia (strategi). Secara umum disebut strategi murni (*pure strategy*) yang mengacu pada pemilihan gerakan secara tunggal. Hal ini berbeda dengan strategi campuran (*mixed strategy*) dimana terdapat randomisasi dalam pemilihan gerakan. Permainan yang tidak memiliki strategi optimal pada murni biasanya memiliki strategi optimal pada campuran. Misalkan terdapat dua pemain, pemain I dan II. Pemain I memiliki sejumlah *n* pilihan strategi dan pemain II memiliki sejumlah *m* pilihan strategi. Pemain I memilih strategi $i, i = 1, \ldots, n$, dan pemain II memilih strategi $j, j = 1, \ldots, m$.
3. *Payoff* yang dinotasikan sebagai a_{ij} yang merupakan hasil permainan ketika pemain I memilih strategi i dan pemain II memilih menggunakan strategi j.

Dalam teori permainan permainan dapat dibedakan berdasarkan jumlah bemain, gerakan, keberadaan informasi, jumlahan *payoff*, dan kooperatif tidaknya pemain.

1. Permainan berdasarkan jumlah pemain

   Secara sederhana permainan dapat diklasifikasikan berdasarkan jumlah pemain. Permainan yang dimainkan oleh satu pemain disebut permainan satu pemain (*1-person game*), permainan yang dimainkan oleh dua pemain disebut permainan dua pemain (*2-person game*) dan permainan yang dimainkan oleh s-pemain disebut permainan *s*-pemain (*s-person game*).

2. Permainan berdasarkan gerakan

   Gerakan didefinisikan sebagai cara dimana permainan tersebut berlangsung sebagai *progress* dalam pertukaran informasi. Gerakan yang dapat dilakukan oleh pemain dibatasi oleh aturan. Misalnya, dalam permainan catur benteng hanya boleh berjalan horizontal maupun vertikal saja. Jenis permainan berdasarkan gerakan pemain dapat dibedakan menjadi dua, bersamaan (*simultaneous*) atau bergantian (*sequential*). Permainan bersamaan merupakan permainan dimana pemain bergerak bersamaan (jika tidak bersamaan, pemain mengetahui gerakan yang dimainkan oleh pemain lain). Contoh permainan ini adalah permainan ganjil genap, labirin kucing tikus. Permainan bergantian adalah permainan dimana pemain bergerak bergantian misalnya permainan catur, nim.

3. Permainan berdasarkan keberadaan informasi

   Permainan dapat diklasifikasikan berdasarkan seberapa banyak informasi yang diketahui oleh pemain. Permainan diklasifikasikan sebagai permainan dengan informasi sempurna (*perfect information game*) dan permainan dengan informasi tak sempurna (*imperfect information game*). Permainan dengan informasi sempurna merupakan permainan dimana pemain mengetahui segala kejadian dalam permainan tersebut. Hanya permainan bergantian yang merupakan permainan dengan informasi sempurna sebab dalam permainan bersamaan pemain tidak mengetahui gerakan yang telah dilakukan pemain lawan. Permainan dengan informasi sempurna tidak sama dengan permainan dengan informasi lengkap (*complete information game*). Permainan dengan informasi lengkap lebih mengacu kepada permainan dimana pemain mengetahui strategi dan *payoff* yang tersedia tetapi tidak mengharuskan mengetahui gerakan yang telah dilakukan pemain lain.

4. Permainan berdasarkan jumlahan *payoff*

   Berdasarkan jumlahan *payoff* permainan dapat dikategorikan sebagai permainan dengan jumlahan konstan (*constant sum game*) dan permainan dengan jumlahan bervariasi (*variable sum game*). Permainan dengan jumlahan konstan memiliki jumlahan *payoff* yang sama untuk setiap hasil permainannya (keluaran). Permainan seperti catur dan poker merupakan permainan dengan jumlahan konstan. Dalam permainan jumlahan konstan setiap pemain memiliki hasil yang berlainan. Maksudnya, jika salah satu pemain menang maka pemain yang lain kalah. Permainan dengan jumlahan bervariasi memiliki jumlahan *payoff* yang berbeda-beda tergantung pada strategi mana yang digunakan. Dalam permainan dengan jumlahan bervariasi, pemain bisa sama-sama menang maupun sama-sama kalah.

Berdasarkan jumlahannya, permainan juga dapat dikategorikan sebagai permainan dengan jumlahan nol (*zero sum game*) dan permainan dengan jumlahan tak nol (*non zero sum game*). Permainan jumlahan nol merupakan bagian dari permainan jumlahan konstan. Dalam permainan jumlahan nol pendapatan pemain (atau kekalahan) adalah tepat sama dengan kekalahan (atau pendapatan) pemain lain. Misalkan pemain I menang 1 maka pemain II kalah 1. Sehingga kemenangan dihitung tambah dan kekalahan dihitung kurang maka setelah dioperasikan jumlahan *payoff*nya tepat nol. Disisi lain, permainan dengan jumlahan tak nol memiliki jumlahan hasil pendapatan dan kekalahan lebih dari atau kurang dari nol (positif atau negatif). Selanjutnya, permainan akan merujuk pada permainan jumlahan konstan dan permainan jumlahan nol.

5. Permainan berdasarkan kooperatif tidaknya pemain

   Permainan berdasarkan kooperativitas dibedakan menjadi permainan kooperatif dan non kooperatif. Dalam permainan kooperatif pemain boleh bercakap-cakap dan saling membuat perjanjian sedangkan dalam permainan non kooperatif pemain boleh bercakap-cakap namun tidak diperbolehkan melakukan perjanjian.

1.1.2 Matriks Permainan

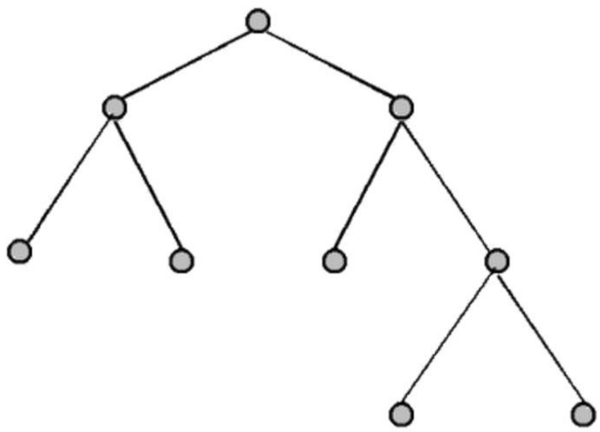
Permainan biasa direpresentasikan menggunakan tabel. Bentuk representasi ini disebut bentuk normal (*strategic*). Bentuk ini biasa digunakan dalam permainan bersamaan dimana isi dari matriks merupakan hasil dari masing-masing strategi yang berkoresponden. Misalkan terdapat dua pemain, pemain I dan II. Pemain I memiliki sejumlah n pilihan strategi dan pemain II memiliki sejumlah m strategi. Jika pemain I memilih strategi i, $i = 1, \dots, n$, dan pemain II memilih strategi j, $j = 1, \dots, m$, kemudian mereka memainkan permainan dimana hasilnya (*payoff*) dihitung. Dalam permainan *zero-sum*, jika salah satu pemain menang maka pemain yang satunya mendapatkan kekalahan. Jadi, jika pemain I mendapatkan a_{ij} maka pemain II mendapatkan $-a_{ij}$. Sekarang, angka-angka $\{a_{ij}\}$ dikumpulkan, , $i = 1, \dots, n$, , $j = 1, \dots, m$, maka dapat diatur sebuah matriks. Angka-angka ini disebut *payoff* kepada pemain I dan matriknya disebut matriks *payoff* atau matriks permainan (dapat disebut tabel permainan).

	Pemain II			
Pemain I	Strategi 1	Strategi 2	...	Strategi m
Strategi 1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1m}
Strategi 2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Strategi n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nm}

Tabel 1. Matriks permainan dua pemain

Pemain I merupakan pemain baris dan pemain II merupakan pemain kolom. Karena didalam permainan *zero-sum* nilai *payoff* pemain II merupakan negatif dari pemain I, maka *payoff* pemain II tidak perlu dicantumkan dalam tabel. Dengan kata lain, nilai yang berada dalam tabel merupakan nilai yang merepresentasikan *payoff* pemain I. Kedua pemain selalu ingin memaksimalkan *payoff* individu mereka. Pemain I akan memilih strategi yang dapat memaksimalkan hasil, sementara pemain II akan memilih strategi untuk meminimalkan hasil pemain I sehingga hasil yang diperoleh pemain II akan maksimal.

Permainan juga dapat direpresentasikan dalam diagram pohon. Bentuk representasi ini disebut bentuk yang diperluas (*extensive*). Bentuk ini merupakan bentuk grafis permainan bergantian. Diagram ini menyediakan informasi mengenai pemain, *payoff*, dan strategi. Diagram ini terdiri dari node dan segmen. Node merepresentasikan titik dimana pemain bergerak dan segmen merepresentasikan hal yang dilakukan pada node tersebut.



Gambar 1. Bentuk diperluas

1.1.3 Strategi Optimal

Strategi optimal merupakan strategi terbaik dimana dalam situasi permainan, pemain tidak akan mengubah strateginya. Pengertian lebih umum, strategi optimal merupakan situasi yang memiliki resiko terendah (aman). Hal pertama yang dapat digunakan untuk menentukan apakah sebuah permainan memiliki strategi optimal atau tidak dapat menggunakan cara dan sistematika matematis. Pada strategi murni dimana pemain berfokus pada baris atau kolom tertentu, hal pertama yang perlu dilakukan adalah menentukan *upper* dan *lower value.*

Misalkan terdapat sebuah matrik permainan $A = (a_{ij})$. dari sudut pandang pemain I. Pemain I mengasumsikan bahwa pemain II akan bermain secara maksimal, sehingga pemain II memilih kolom yang meminimalkan a_{ij} terhadap $j = 1, \ldots, m$ untuk setiap baris i. Kemudian, pemain I dapat memastikan bahwa dia dapat memilih baris *i* yang memaksimalkan hasil tersebut (memaksimalkan dari minimal). Sehingga, dalam situasi terburuk pemain I setidaknya mendapatkan

$$v^- = \max_{i=1,\ldots,n} \min_{j=1,\ldots,m} a_{ij}$$

v^- disebut nilai bawah dari permainan (*lower value of the game)* atau disebut juga dasar permainan (*floor game)* pemain I.

Kemudian, dari sudut pandang pemain II. Pemain II mengasumsikan bahwa pemain I akan bermain maksimal sehangga pemain I memilih baris yang memaksimalkan a_{ij} terhadap $i = 1, \ldots, n$ untuk setiap kolom $j = 1, \ldots, m$. Pemain II dapat memilih kolom j yang meminimalkan hasil maksimal pemain I. sehingga, pemain II dapat memastikan bahwa kerugian yang diperoleh tidak lebih dari

$$v^+ = \min_{j=1,\ldots,m} \max_{i=1,\ldots,n} a_{ij}$$

v^+ disebut nilai atas dari permainan (*upper value of the game)* atau disebut juga atap permainan (*loss ceiling)* pemain II.

Kesimpulannya, v^- merepresentasikan jumlah terkecil yang pasti pemain I peroleh dan v^+ merepresentasikan jumlah terbesar yang yang pasti pemain II hilangkan. Sehingga $v^- \leq v^+$.

Definisi 1. Sebuah matriks permainan dengan matrik $A_{n\times m} = (a_{ij})$ memiliki *lower value*

$$v^- = \max_{i=1,\ldots,n} \min_{j=1,\ldots,m} a_{ij}$$

dan *upper value*

$$v^{+} = \min_{j=1,\dots,m} \max_{i=1,\dots,n} a_{ij}$$

Lower value v^{-} merupakan jumlah terkecil yang pasti pemain I peroleh (v^{-} merupakan pendapatan dasar dari permain I), dan ***upper value*** v^{+} merupakan jumlah kehilangan terbesar yang pasti dialami oleh pemain II (*loss ceiling* dari pemain II). Jika $v^{-} = v^{+}$, atau dapat ditulis

$$v = v(A) = v^{-} = v^{+}$$

yang berarti maksimal terkecil dan minimal terbesar haruslah sama dan baris i^{*} serta kolom j^{*} memberikan *payoff* $A_{i^{*}j^{*}} = v^{-} = v^{+}$ yang optimal atau disebut **titik sadel** (*sadle point)* pada strategi murni (*pure strategi*). $v(A)$ merupakan **nilai permainan.** Nilai permainan adalah *payoff* rata-rata atau yang diharapkan sepanjang permainan.

Misalkan terdapat matriks permainan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

maka mencari v^{-} dan v^{+}

a_{11}	a_{12}	…	a_{1m}	$\rightarrow min_j a_{1j}$
a_{21}	a_{22}	…	a_{2m}	$\rightarrow min_j a_{2j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nm}	$\rightarrow min_j a_{ij}$
$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$	$v^{-} = min\, terbesar$
$max_i a_{i1}$	$max_i a_{i2}$		$max_i a_{ij}$	$v^{+} = max\, terkecil$

Tabel 2. *Upper* dan *Lower Value*

Teorema 2. $v^{-} \leq v^{+}$

Untuk setiap kolom j kita tahu bahwa untuk setiap baris yang bersesuaian i, $\min_{j} a_{ij} \leq a_{ij}$ sehingga dengan mengambil maksimum dari masing-masing sisi terhadap barisnya didapatkan $v^{-} = \max_{i} \min_{j} a_{ij} \leq \max_{i} a_{ij}$ benar untuk setiap kolom $j = 1, \dots, m$. Ruas kiri merupakan sebuah angka independen dari i dan juga j dan angka ini lebih kecil dari ruas kanan untuk setiap j. Sedangkan untuk setiap baris i dan kolom yang bersesuaian j, $\max_{i} a_{ij} \geq a_{ij}$, sehingga dengan mengambil minimum dikedua ruasnya diperoleh $v^{+} = \min_{j} \max_{i} a_{ij} \geq$

$\min_j a_{ij}$. Dari informasi ini diperoleh $\min_j a_{ij} \leq \max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij} \leq \max_i a_{ij}$.
Sehingga $v^- = \max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij} = v^+$. □

Definisi 3. Baris i^* serta kolom j^* disebut **titik sadel** (*sadle point)* pada strategi murni (*pure strategi*) apabila

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j} \text{ untuk setiap } i = 1, \dots, n \text{ dan } j = 1, \dots, m$$

Selanjutnya, ada tidaknya titik sadel dapat dicari dengan:

Lemma 4. Sebuah permainan akan memiliki sebuah titik sadel dalam strategi murni jika dan hanya jika

$$v^- = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = v^+$$

Bukti.

Berdasarkan definisi 2 dan klaim $v^- \leq v^+$, maka

$$v^+ = \min_j \max_i a_{ij} \leq a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j} \leq \max_i \min_j a_{ij} = v^-$$

Karena selalu $v^- \leq v^+$, sehingga kita dapat peroleh persamaan $v = v^+ = v^-$. Disisi lain, jika $v^- = v^+$, maka

$$v^+ = \min_j \max_i a_{ij} = \max_i \min_j a_{ij} = v^-$$

Ambil j^* sehingga $v^+ = \max_i a_{ij^*}$ dan i^* sehingga $v^- = \min_j a_{i^*j}$ maka $a_{i^*j} \geq v^- = v^+ \geq a_{ij^*}$ untuk setiap $i = 1, \dots, n$ dan $j = 1, \dots, m$. Sebagai ambahan jika diambil $j = j^*$ pada ruas kiri dan $i = i^*$ pada ruas kanan, didapatkan $a_{i^*j^*} = v^- = v^+$ yang membuat(i^*, j^*) memenuhi kondisi titik sadel. □

Contoh 1.

Misalkan terdapat matrik permainan sebagai berikut:

	Pemain II		
Pemain I	Strategi 1	Strategi 2	Strategi 3
Strategi 1	3	2	1
Strategi 2	5	4	3
Strategi 3	2	-1	0
Strategi 4	1	0	2

Tabel 3. Matrik Permainan Contoh 1

Maka v^- dan v^+ dapat dicari dengan

	Pemain II			$min\ a_{ij}$
Pemain I	Strategi 1	Strategi 2	Strategi 3	
Strategi 1	3	2	1	1
Strategi 2	5	4	3	3
Strategi 3	2	-1	0	-1
Strategi 4	1	0	2	0
$max\ a_{ij}$	5	4	3	

Tabel 4. Maksimum Kolom dan Minimum Baris Contoh 1

$$v^- = \max_{i=1,\dots,n} \min_{j=1,\dots,m} a_{ij} = 3$$

dan

$$v^+ = \min_{j=1,\dots,m} \max_{i=1,\dots,n} a_{ij} = 3$$

Diperoleh

$$v = v^- = v^+ = 3$$

sehingga (I2, II3) merupakan titik sadel dalam permainan ini. Meskipun (I1, II1) merupakan nilai permainan, akan tetapi bukan titik sadel. Jika pemain I mengambil strategi I1 maka pemain I bisa saja mendapatkan 1 yang lebih kecil daripada jika menggunakan strategi I2. Sedangkan dari sudut pandang pemain II, jika pemain II menggunakan strategi II1 maka pemain I bisa saja mendapatkan 5 yang merupakan kerugian yang lebih besar daripada menggunakan II3. Dalam hal ini pemain akan mengganti strateginya maka dia bukan sadel. Kesimpulannya, pemain I akan mendapatkan hasil terbaik ketika pemain I menggunakan I2 secara terus menerus apapun strategi yang digunakan pemain II. Dengan hal ini pemain I akan mendapatkan setidaknya 3. Pemain II akan mendapatkan hasil terbaik ketika menggunakan strategi II3 secara terus menerus. Sehingga, pemain II akan kehilangan maksimal 3.

Permainan yang lebih besar seperti permainan dengan jumlahan konstan (*constant sum games*) dapat direduksi menyerupai permainan *zero sum*. Artinya, apabila pemain I mendapatkan *payoff* sebesar a_{ij} maka pemain II mendapatkan *payoff* sebesar $C - a_{ij}$ dimana C merupakan konstanta tetap. Dalam permainan *zero sum* $C = 0$. Meskipun permainan *constant sum* adalah permainan dengan jumlahan tak nol (*nonzero sum game*) tetapi pemain II tetap mendapatkan *payoff* sebesar C dikurangi *payoff* pemain I. Dalam perspektif teori permainan, strategi optimal permainan tersebut tidak akan berubah meskipun diperlakukan sebagai permainan *zero sum*. Untuk memperoleh hasil optimal pemain I digunakan cara yang sama dengan permainan *zero sum* dan hasil optimal pemain II adalah C dikurangi hasil optimal pemain I.

Terkadang dalam sebuah permainan, matrik yang terbentuk cukup besar. Pereduksian matrik permainan dapat dilakukan untuk mempermudah mencari strategi yang optimal. Pereduksian ini menggunakan strategi dominasi.

Definisi 5. Baris i mendominasi (ketat) baris k jika $a_{ij} > a_{kj}$ untuk seluruh $j = 1, \dots, m$. Hal ini menjadikan mungkinnya dilakukan eliminasi pada baris k. Kolom j mendominasi (ketat) $a_{ij} < a_{ik}$. Hal ini memungkinkan dilakukannya eliminasi pada kolom k.