MATRIKS UNITER, SIMILARITAS UNITER DAN MATRIKS NORMAL

Anis Fitri Lestari

Mahasiswa Universitas Muhammadiyah Ponorogo

ABSTRAK

Matriks normal merupakan matriks persegi yang entri-entrinya bilangan kompleks. Matriks normal merupakan perluasan dari matriks Hermit. Matriks Hermit sendiri ditemukan oleh Charles Hermite (1822-1901), seorang ahli matematika berkebangsaan Perancis yang memberi konstribusi penting pada aljabar, teori matriks, dan berbagai cabang matematika analitik. Beberapa matriks yang termasuk matriks normal adalah matriks diagonal, matriks uniter, matriks Hermit dan matriks skew Hermit.

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui definisi dan sifat-sifat yang berkaitan dengan matriks uniter, similaritas uniter dan matriks normal. Untuk mengetahui hal tersebut, perlu dibahas materi tentang matriks uniter, similaritas uniter dan matriks normal. Matriks uniter diperoleh dari matriks asal yaitu dengan cara mencari basis-basis dari vektor eigen yang saling ortogonal dan ortonormal. Apabila basis-basis tersebut belum ortogonal dan ortonormal, maka kita gunakan proses Gram Schmidt. Sehingga kita dapat membentuk matriks uniter dari basis-basis tersebut. Matriks uniter ini akan digunakan untuk mentransformasi matriks asal menjadi matriks segitiga atas. Sehingga matriks asal akan similar uniter dengan matriks segitiga atas, pernyataan ini dikenal dengan teorema Schur's. Jika matriks asal tersebut berupa matriks normal dan dengan proses transformasi uniter menghasilkan matriks diagonal maka matriks tersebut dikatakan dapat didiagonalisasi secara uniter.

Hasil dari penelitian ini adalah diperoleh definisi dan sifat-sifat dari matriks uniter, similaritas uniter dan matriks normal yang dapat digunakan untuk mengetahui bahwa matriks normal dapat didiagonalisasikan secara uniter. Pernyataan matriks normal dapat didigonalisasikan secara uniter telah dibuktikan pada teorema Spektral.

Kata Kunci : Matriks Uniter, Similaritas uniter, Matriks normal.

PENDAHULUAN

Matematika adalah salah satu cabang ilmu pengetahuan yang abstrak dan banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu cabang ilmu matematika yang sering kita pelajari adalah Aljabar Linear. Aljabar Linear menjadi bagian penting dari matematika yang dibutuhkan oleh para matematikawan, guru matematika, ahli mesin, ahli komputer, fisika, ekonomi, statistik dan lain-lain.

Salah satu tokoh matematika yang terkenal adalah Charles Hermite (1822-1901), seorang ahli matematika berkebangsaan Perancis yang memberi konstribusi penting pada aljabar, teori matriks, dan berbagai cabang matematika analitik. Ia telah menemukan matriks yang disebut matriks Hermit. Ia dikenal sebagai orang yang menggunakan integral untuk menyelesaikan persamaan umum polinomial berderajat lima. Ia juga membuktikan bahwa bilangan e (basis untuk logaritma natural) adalah sebuah bilangan transenden, yaitu sebuah bilangan yang bukan merupakan akar dari persamaan polinomial yang koefisien-koefisiennya adalah bilangan rasional (Anton & Rorres, 2005).

Di dalam aljabar linear dipelajari tentang berbagai macam matriks. Di mana setiap matriks tersebut memiliki sifat-sifat dan kegunaan tertentu. Ditinjau dari entri bilangannya, matriks dibedakan menjadi dua yaitu matriks dengan entri bilangan real (misalnya matriks nol, matriks identitas, matriks orthogonal real, matriks simetris dan lain-lain) dan matriks dengan entri bilangan kompleks (misalnya matriks normal seperti matriks diagonal, matriks uniter, matriks Hermit dan matriks skew Hermit).

Ukuran suatu matriks dinyatakan dalam jumlah baris (arah horizontal) dan kolom (arah vertikal) yang dimilikinya. Ditinjau dari ukurannya matriks normal merupakan matriks persegi karena memiliki ukuran $n \times n$. Sedangkan entri-entri dari matriks normal adalah bilangan kompleks. Dalam penelitian ini, penulis akan membahas tentang matriks normal. Matriks normal juga mempunyai banyak kegunaan dalam beberapa bidang ilmu lain seperti fotometri, makromolekular, graf dan bidang lainnya. Salah satu matriks normal yang akan digunakan dalam penelitian ini adalah matriks uniter.

Dalam kasus ini, matriks uniter digunakan untuk mentransformasi matriks asal menjadi matriks segitiga atas atau matriks diagonal. Sehingga matriks asal akan similar uniter dengan matriks segitiga atas atau matriks diagonal. Untuk mengetahui kepastian dari pernyataan tersebut, dibutuhkan definisi dan sifat-sifat dari matriks uniter, similaritas uniter dan matriks normal. Untuk itu, maka penulis ingin menulis skripsi mengenai **Matriks Uniter, Similaritas Uniter dan Matriks Normal**.

RUMUSAN MASALAH

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah diuraikan di atas, maka dirumuskan pertanyaan penelitian sebagai berikut:

1. Apa definisi dan sifat-sifat yang berkaitan dengan matriks uniter?
2. Apa definisi dan sifat-sifat yang berkaitan dengan similaritas uniter?
3. Apa definisi dan sifat-sifat yang berkaitan dengan matriks normal?

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penulisan ini adalah penelitian kepustakaan atau riset kepustakaan (*library research*). Riset kepustakaan atau sering juga disebut studi pustaka ialah serangkaian kegiatan yang berkenaan dengan metode pengumpulan data pustaka, membaca dan mencatat serta mengolah bahan penelitian. (Zed, 2008: 3). Sedangkan menurut Nazir dalam bukunya yang berjudul ‘Metode Penelitian’ mengemukakan bahwa yang dimaksud dengan Studi kepustakaan adalah teknik pengumpulan data dengan mengadakan studi penelaahan terhadap buku-buku, literatur-literatur, catatan-catatan, dan laporan-laporan yang ada hubungannya dengan masalah yang dipecahkan.

Data yang diperlukan dalam penelitian ini adalah data yang bersifat tekstual meliputi konsep tentang matriks uniter, similaritas uniter dan matriks normal. Informasi untuk penelitian ini dikumpulkan dari buku-buku acuan mengenai aljabar linear, jurnal-jurnal dan artikel di internet mengenai matriks uniter, similaritas uniter dan matriks normal. Buku acuan utama yang digunakan adalah *Handbook of Linear Algebra* (2007), *Matrix Analysis* (1985) dan Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi Edisi 8 (2005).

Pengumpulan data merupakan salah satu proses pengadaan data untuk keperluan penelitian. Pengumpulan data adalah prosedur yang sistematis dan standar untuk memperoleh data yang diperlukan. Untuk memperoleh data, penulis menggunakan langkah-langkah *Library Research* yaitu setiap penelitian memerlukan bahan yang bersumber dari perpustakaan. Penulis menggunakan metode dokumenter, yaitu mencari data mengenai hal-hal atau variabel yang berupa catatan, buku-buku, jurnal penelitian yang relevan dengan permasalahan yang penulis bahas.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan penulis dalam menganalisis data adalah sebagai berikut:

1. Mencari definisi dan sifat-sifat yang berkaitan dengan matriks uniter, similaritas uniter dan matriks normal.
2. Membuktikan teorema yang berkaitan dengan materi yang dibahas termasuk teorema Schur's dan teorema spektral.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Matriks Uniter

Definisi Matriks $U \epsilon M_n$ dikatakan uniter jika $U^*U = I$. [Jika $U \epsilon M_n(\mathbb{R})$ dan $U^TU = I$, maka U disebut matriks ortogonal real.]

Contoh Tunjukkan bahwa matriks $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{bmatrix}$ adalah uniter !

Jawab :

Misal $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{bmatrix}$ maka $U^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{bmatrix}$

$$U^*U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{bmatrix}$$

$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{bmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = I$

Karena $U^*U = I$ maka U merupakan matriks uniter.

Teorema *Jika* $U \epsilon M_n$, *maka pernyataan berikut ekuivalen:*

a. *U matriks uniter*
b. *U matriks non singular dan* $U^* = U^{-1}$
c. $UU^* = I$
d. *U^* matriks uniter*
e. *Kolom dari matriks U membentuk himpunan ortonormal*
f. *Baris dari matriks U membentuk himpunan ortonormal*
g. *Untuk semua $x \epsilon \mathbb{C}^n$, panjang Euclidean dari $y = Ux$ sama dengan x; sehingga $y^*y = x^*x$.*

Teorema *Hasil kali dua atau lebih matriks uniter adalah uniter.*

Teorema *Matriks persegi U adalah uniter jika hanya jika $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ untuk $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$.*

Teorema *Matriks persegi U adalah uniter jika hanya jika $\|Ux\| = \|x\|, \forall x \in \mathbb{C}^n$.*

Teorema *Jika U matriks uniter dan λ nilai eigen dari U, maka $|\lambda| = 1$ dan $|det(U)| = 1$.*

Similaritas Uniter

Definisi Matriks $B \epsilon M_n$ dikatakan similaritas uniter atau ekuivalen uniter dengan $A \epsilon M_n$ jika ada matriks uniter $U \epsilon M_n$ sehingga $B = U^*AU$. Pemetaan dari A menjadi U^*AU disebut transformasi uniter.

Contoh Tunjukkan bahwa matriks $A = \begin{bmatrix}1+i & 1-i\\ 1-i & 1+i\end{bmatrix}$ similar uniter dengan matriks $= \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2i\end{bmatrix}$!

Jawab :

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix}1+i & 1-i\\ 1-i & 1+i\end{bmatrix}$, cari matriks uniter U dengan cara mencari vektor eigen yang basisnya saling ortogonal dan ortonormal.

$det(\lambda I - A) = 0$

$det\left(\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1+i & 1-i\\1-i & 1+i\end{bmatrix}\right)=0$
$det\left(\begin{bmatrix}\lambda & 0\\0 & \lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1+i & 1-i\\1-i & 1+i\end{bmatrix}\right)=0$
$det\begin{bmatrix}\lambda-(1+i) & -(1-i)\\-(1-i) & \lambda-(1+i)\end{bmatrix}=0$
$\big(\lambda-(1+i)\big).\big(\lambda-(1+i)\big)-(1-i).(1-i)=0$
$\lambda^2-2(1+i)\lambda+(1+i)^2-(1-i)^2=0$
$\lambda^2-2\lambda-2i\lambda+2i-(-2i)=0$
$\lambda^2-(2+2i)\lambda+4i=0$
$(\lambda-2)(\lambda-2i)=0$
$\lambda=2\ atau\ \lambda=2i$
Mencari vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda=2$.
$(\lambda I-A)X=0$
$\begin{bmatrix}1-i & -(1-i)\\-(1-i) & 1-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$
$(1-i)x_1-(1-i)x_2=0$
$(1-i)x_1=(1-i)x_2$
$x_1=x_2$
Misal $x_2=s$ maka $x_1=s$ sehingga dapat diperoleh vektor eigen $\begin{bmatrix}s\\s\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$.
Mencari vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda=2i$.
$(\lambda I-A)X=0$
$\begin{bmatrix}-1+i & -1+i\\-1+i & -1+i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$
$(-1+i)x_1+(-1+i)x_2=0$
$(-1+i)x_1=-(-1+i)x_2$
$x_1=-x_2$
Misal $x_2=s$ maka $x_1=-s$ sehingga dapat diperoleh vektor eigen $\begin{bmatrix}-s\\s\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$.
Dari vektor eigen tersebut diperoleh basis $u_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ dan $u_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$. Karena basis tersebut sudah ortogonal tetapi belum ortonormal maka kita gunakan proses Gram Schmidt untuk mentransformasikan vektor-vektor basis $u_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ dan $u_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ menjadi basis yang ortogonal dan ortonormal.
$\|u_1\|=\sqrt{2}$ dan $\|u_2\|=\sqrt{2}$
sehingga basis ortonormal untuk $\mathbb{C}^2$ adalah
$\frac{u_1}{\|u_1\|}=\frac{(1,1)}{\sqrt{2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
$\frac{u_2}{\|u_2\|}=\frac{(-1,1)}{\sqrt{2}}=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Sehingga diperoleh matriks uniter $U=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$ dan $U^*=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$
U^*AU
$=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1+i & 1-i\\1-i & 1+i\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$
$=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2}\\-\sqrt{2}i & \sqrt{2}i\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$
$=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2i\end{bmatrix}=B$

Karena $U^*AU=B$ maka matriks A similar uniter dengan matriks B.

Teorema *Similaritas uniter adalah relasi yang ekuivalen. Dengan kata lain:*

a. *A similar uniter dengan A untuk semua $A\in M_n(\mathbb{C})$,*
b. *A similar uniter dengan B jika hanya jika B similar uniter dengan A,*
c. *Jika A similar uniter dengan B, dan B similar uniter dengan C, maka A similar uniter dengan C.*

Lemma *Jika (λ,u) adalah pasangan eigen dari matriks A dan U yang ukurannya adalah $n\times n$, dengan U matriks uniter yang kolom pertamanya adalah u yaitu vektor eigen yang bersesuaian dengan λ. Maka kolom pertama dari U^*AU adalah λe_1.*

Teorema Schur's *Sebarang matriks persegi similar uniter dengan matriks segitiga atas.*

Matriks Normal

Definisi Matriks $A\in M_n$ disebut matriks normal jika $A^*A=AA^*$.

Contoh

a) Karena $U^*U=I=UU^*$ jika U adalah matriks uniter, maka semua matriks uniter adalah matriks normal.

b) Karena $A^*A = A^2 = AA^*$ jika A adalah matriks Hermit dengan $A^* = A$, maka semua matriks Hermit adalah matriks normal.
c) Jika $A \in M_n$ sehingga $A^* = -A$, A disebut skew-Hermit. Pada kejadian ini, $A^*A = -A^2 = AA^*$, sehingga semua matriks skew-Hermit adalah matriks normal.
d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ adalah matriks normal, tetapi tidak termasuk dalam kategori di atas. Karena $A^*A = AA^* \neq I$, $A^* \neq A$, dan $A^* \neq -A$ sehingga $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ tidak termasuk dalam tiga kategori matriks di atas.

Teorema Spektral *Jika* $A = [a_{ij}] \in M_n$ *mempunyai nilai eigen* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, *maka pernyataan berikut ekuivalen:*

(a) A matriks normal
(b) A dapat di diagonalisasi secara uniter
(c) $\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$

SIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut:

Matriks $U \epsilon M_n$ dikatakan uniter jika $U^*U = I$. Matriks uniter memiliki sifat-sifat antara lain invers dari matriks uniter adalah uniter, hasil kali dua atau lebih matriks uniter adalah uniter, kolom dan baris dari matriks uniter membentuk himpunan ortonormal. Selain itu, harga mutlak dari nilai eigen dan determinan dari matriks uniter adalah 1.

Sedangkan matriks $B \epsilon M_n$ dikatakan similaritas uniter atau ekuivalen uniter dengan $A \epsilon M_n$ jika ada matriks uniter $U \epsilon M_n$ sehingga $B = U^*AU$. Similaritas uniter memiliki sifat-sifat seperti:

a. A similar uniter dengan A untuk semua $A \in M_n(\mathbb{C})$ atau sifat refleksi,
b. A similar uniter dengan B jika hanya jika B similar uniter dengan A atau sifat simetri,
c. Jika A similar uniter dengan B, dan B similar uniter dengan C, maka A similar uniter dengan C atau sifat transitif.

Teorema Schur's menyatakan bahwa sebarang matriks persegi similar uniter dengan matriks segitiga atas. Teorema ini merupakan perumuman dari diagonalisasi yang nantinya akan digunakan untuk membuktikan teorema spektral. Teorema Schur's sangat berguna dalam menyelesaikan berbagai masalah yang berkaitan dengan nilai eigen.

Selain itu, matriks $A \in M_n$ disebut matriks normal jika $A^*A = AA^*$. Sifat-sifat dari matriks normal adalah dapat didiagonalisasikan secara uniter dan mempunyai basis-basis yang ortonormal dari vektor eigennya.

Untuk penelitian selanjutnya disarankan membahas tentang penerapan teorema Schur's atau teorema spektral misalnya aplikasi teorema spektral untuk menghitung invers tergeneralisasi moore-penrose untuk sebarang matriks

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. 2000. *Dasar-Dasar Aljabar Linear, Edisi 7, Jilid 2.* Batam Centre: Interaksara.

Anton, Howard dan Chris Rorres. 2005. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi, Edisi 8, Jilid 2*. Jakarta: Erlangga.

Ayres F. 1982. *Theory and Problems of Matriks*. Singapura: Mc. Graw-Hill.

Fei, Wang. 2001. *Unitary Similarities and Schur's Theorem*. www.math.nus.edu.sg diakses tanggal 7 Mei 2014.

Grone, Robert and John Dusel. 2005. *Linear Algebra*. www.math.ucr.edu diakses tanggal 7 Mei 2014.

Hogben, Leslie. 2007. *Handbook of Linear Algebra*. Chapman & Hall/CRC: Taylor & Francis Group.

Horn, Roger A. and Charles R. Johnson. 1985. *Matrix Analysis*. New York: Cambridge University Press.

Imrona, Mahmud. 2013. *Aljabar Linear Dasar, Edisi Kedua*. Jakarta: Erlangga.

Lipschutz, Seymour. 1981. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Linear Algebra*. Singapore: Mc Graw-Hill International Book Company.

Lipschutz, Seymour and Marc Lars Lipson. 2009. *Schaum's Outlines Linear Algebra Fourth Edition*. Singapore: Mc Graw Hill.

Nazir, Moh. 1988. "Metode Penelitian". Jakarta: Ghalia Indonesia.

Sekadji. 2008. *Aljabar Linear Edisi Pertama*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Zed, Mestika. 2008. "Metode Penelitian Kepustakaan". Jakarta: Yayasan Obor Indonesia.