**BAB II**

**KAJIAN PUSTAKA**

**2.1 Bilangan Kompleks**

**Definisi 2.1.** Bilangan Kompleks adalah sebuah pasangan berurutan bilangan real, yang dinotasikan oleh atau , dimana .

**Contoh 2.1.** Beberapa contoh bilangan kompleks dalam kedua notasi diatas adalah sebagai berikut:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Pasangan Berurutan** | **Notasi yang Ekuivalen** | **Bentuk Sederhana** |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Secara geometris, suatu bilangan kompleks bisa dipandang baik sebagai sebuah titik maupun sebuah vektor pada bidang .



**Bidang kompleks**

Untuk menyatakan suatu bilangan kompleks kita gunakan suatu huruf tunggal, misalkan . Sehingga kita bisa menuliskan

Bilangan real disebut sebagai **bagian real dari** ,yang dinotasikan dengan Re(). Sedangkan bilangan real disebut sebagai **bagian imajiner dari** , yang dinotasikan dengan Im().

**Contoh 2.2.** Diketahui , tentukan bagian real dan bagian imajiner dari !

Jawab :

Re() = Re() = dan Im() = Im() = .

Apabila bilangan kompleks direpresentasikan secara geometris dalam sistem koordinat , maka sumbu- disebut **sumbu real**, sumbu- disebut **sumbu imajiner**, dan bidang disebut **bidang kompleks (*complex plane*)**.



**Operasi – Operasi Pada Bilangan Kompleks**

**Definisi 2.2.** Dua bilangan kompleks, dan , didefinisikan **sama**, dan dapat ditulis

jika dan .

Jika , maka bilangan kompleks menjadi , dan dapat ditulis sebagai . Jadi, untuk sebarang bilangan real ,

sehingga bilangan real bisa dipandang sebagai bilangan kompleks dengan bagian imajinernya adalah nol. Secara geometris, bilangan real dapat dinyatakan sebagai titik-titik pada sumbu real. Jika , maka bilangan kompleks menjadi , dan dapat ditulis sebagai . Bilangan-bilangan kompleks semacam ini, secara geometris dapat dinyatakan sebagai titik-titik pada sumbu imajiner, yang disebut **bilangan imajiner murni**.

Operasi-operasi pada bilangan kompleks :

1. Penjumlahan
2. Pengurangan
3. Perkalian dengan sebuah bilangan real
4. Perkalian bilangan-bilangan kompleks

**2.2 Pembagian bilangan kompleks**

**Konjugat Kompleks**

Jika adalah sebarang bilangan kompleks, maka konjugat kompleks (*complex conjugate*) dari dinotasikan dengan simbol dan didefinisikan sebagai

**Contoh 2.3.** Konjugat kompleks

|  |  |
| --- | --- |
|   |   |
|   |   |
|   |   |
|   |   |
|   |   |

**Definisi 2.3.** Modulus sebuah bilangan kompleks , yang dinotasikan dengan , didefinisikan sebagai

**Contoh 2.4.** Tentukan jika .

Jawab :

 maka diperoleh dan , sehingga .

**Teorema 2.1** *Untuk sebarang bilangan kompleks ,*

**Bukti :**

Misal dan maka

**Pembagian bilangan kompleks**

Pembagian bilangan kompleks didefinisikan sebagai invers atau kebalikan dari perkalian. Sehingga, jika , maka definisi untuk haruslah sedemikian rupa sehingga .

**Teorema 2.2** *Jika maka memiliki sebuah solusi yang unik, yaitu*

**Bukti :**

Misalkan , , dan . Maka dapat dituliskan sebagai

Dengan menyamakan bagian-bagian real dan imajinernya maka diperoleh

atau

 (\*)

Karena , berarti dan tidak sekaligus keduanya nol, sehingga

Maka dengan menggunakan aturan Cramer, sistem (\*) memiliki solusi sebagai berikut

Sehingga,

Dengan demikian, untuk didefinisikan

Cara lain untuk menghitung , dengan mengalikan pembilang dan penyebut dengan (konjugat dari penyebut).

**Contoh 2.5.** Nyatakan dalam bentuk !

Jawab :

Misal dan

**Teorema 2.3**. (*Sifat-sifat Konjugat Kompleks) Untuk sebarang bilangan kompleks , dan*

**Bukti :**

Misal , dan maka

**2.3 Bentuk Polar Bilangan Kompleks**



**Bentuk Polar**

Jika sebuah bilangan kompleks bukan nol, , dan 𝜃 merupakan ukuran sudut yang terbentuk antara sumbu real positif dengan vektor , maka diperoleh

 (1)

sehingga dapat dituliskan sebagai

 (2)

Persamaan (2) disebut sebagai **bentuk polar dari** .

**Argumen sebuah Bilangan Kompleks**

Sudut 𝜃 disebut sebagai **argumen dari**  dan dinotasikan dengan

Sedangkan satu nilai argumen dalam radian yang memenuhi , disebut **argumen utama dari**  dan dinotasikan dengan

**Perkalian dan Pembagian Bentuk Polar Bilangan Kompleks**

Jika dan maka hasil kali dari sebagai berikut

 (3)

 merupakan sebuah bentuk polar dari bilangan kompleks yang modulusnya dan argumennya . Dengan demikian diperoleh

dan

Hasil kali dua bilangan kompleks didapatkan dengan cara mengalikan modulus kedua bilangan dan menjumlahkan argumen-argumennya.

Sedangkan untuk , maka

Sehingga diperoleh

dan

Hasil bagi dua bilangan kompleks didapatkan dengan cara membagi modulus kedua bilangan dan mengurangi argumen-argumennya.

**Rumus DeMoivre**

Jika adalah sebuah bilangan bulat positif dan maka dari rumus (3) diperoleh

Kasus khusus untuk , maka , sehingga

yang dikenal sebagai rumus DeMoivre.

**Akar Pangkat**

Jika adalah sebuah bilangan bulat positif, dan adalah sebarang bilangan kompleks, maka kita mendefinisikan **akar pangkat dari**  sebagai bilangan kompleks sebarang yang memenuhi persamaan

Akar pangkat dari dinotasikan dengan . Jika , maka kita dapat menurunkan rumus untuk akar pangkat dari sebagai berikut. Misalkan

 dan

Asumsikan memenuhi persamaan , maka

Dengan membandingkan modulus pada kedua sisi maka diperoleh atau

Dan untuk memenuhi kesamaan dan , sudut dan harus sama atau memiliki selisih sebesar kelipatan . Sehingga

atau

Sehingga, nilai-nilai diberikan oleh

**Eksponen Kompleks**

Bentuk eksponen kompleks didefinisikan sebagai

Sehingga bentuk polar dapat ditulis sebagai

**Perkalian dan Pembagian Eksponen Kompleks**

Misal dan adalah bilangan-bilangan kompleks bukan nol maka

dan

Konjugat bilangan kompleks dalam bentuk polar

Maka

Kasus khusus untuk , bentuk polar dari adalah sehingga diperoleh

* 1. **Determinan**

**Definisi 2.4.** Determinan, , dari matriks adalah elemen pada yang dinyatakan sebagai:

1. Untuk , minor ke- dari matriks yang bersesuaian dengan dinyatakan oleh .
2. Kofaktor ke- dari adalah .
3. untuk .

**Definisi 2.5.** (Trase) Misalkan , trase dari matriks dinyatakan oleh merupakan penjumlahan semua diagonal utama dari ,

* 1. **Ruang Vektor Kompleks**

Sebuah ruang vektor yang skalar-skalarnya berupa bilangan kompleks disebut **ruang vektor kompleks (*complex vector space*)**.

**Definisi 2.6.** Misal adalah lapangan dan himpunan tak kosong dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar yang menunjukkan hasil penjumlahan dan hasil perkalian . Maka disebut ruang vektor diatas jika aksioma-aksioma berikut dipenuhi:

1. , berlaku
2. ,
3. Ada , yang disebut vektor nol, yang memenuhi ,
4. , ada , yang memenuhi
5. dan , berlaku
6. dan , berlaku
7. dan berlaku
8. Untuk skalar satuan ,

Sifat-sifat bahwa untuk setiap dan , dan disebut tertutup dibawah penjumlahan (*closure under addition*) dan tertutup dibawah perkalian skalar (*closure under scalar multiplication*). Elemen-elemen dari ruang vektor disebut vektor. Sebuah ruang vektor disebut ruang vektor real jika dan disebut ruang vektor kompleks jika .

**Contoh 2.6.** Misal himpunan dari semua matriks berordo dengan entri dari sebarang lapangan . Maka adalah ruang vektor diatas dengan operasi penjumlahan matriks dan perkalian skalar.

**Contoh 2.7.** Buktikanlah bahwa yang dilengkapi dengan penjumlahan dan perkalian skalar bisa termasuk ruang vektor.

Jawab:

 termasuk ruang vektor karena memenuhi kesepuluh aksioma ruang vektor berikut:

1. {tertutup terhadap penjumlahan}
2. {komutatif}
3. {asosiatif}
4. Ada yang bersifat {elemen nol}
5. Jika , maka selalu ada , sehingga {invers}
6. {tertutup perkalian skalar}
7. {distributif}
8. {distributif}
9. {asosiatif}
10. {perkalian dengan satu}

**Definisi 2.7.** (Matriks nonsingular) Matriks berordo disebut invertibel atau nonsingular, jika ada matriks lain yaitu berordo disebut invers dari , sehingga . Invers dari dinotasikan . Jika matriks tidak ada, tidak invertibel atau singular.

**Definisi 2.8.** Sebuah vektor disebut **kombinasi linear (*linear combination*)** dari vektor-vektor jika dapat dinyatakan dalam bentuk

dimana adalah bilangan-bilangan kompleks.

Konsep-konsep **kebebasan linear (*linear independence*), merentang (*spanning*), basis (*basis*), dimensi (*dimension*), dan subruang (*subspace*)** dapat diterapkan pada ruang-ruang vektor kompleks tanpa perubahan apapun, dan teorema-teorema tetap berlaku ketika berubah menjadi . Sebuah vektor pada dapat dituliskan dalam notasi vektor

atau dalam notasi matriks

dimana

**Definisi 2.9.** Misalkan ruang vektor. . Himpunan disebut bebas linear jika persamaan vektor

hanya dipenuhi oleh . Jika terdapat penyelesaian yang lain maka disebut tak bebas linear atau bergantung linear.

**Definisi 2.10.** Misalkan ruang vektor. . disebut membangun jika setiap vektor di tersebut dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari .

**Contoh 2.8.** membangun . Karena setiap vektor di dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari maka .

**Definisi 2.11.** Misalkan ruang vektor. . disebut basis ruang vektor jika memenuhi dua aksioma berikut:

1. bebas linear
2. membangun

**Contoh 2.9.**  adalah basis matriks .

**Definisi 2.12.** Jika dan adalah vektor-vektor pada , maka hasil kali dalam Euclidean kompleks antara keduanya, , didefinisikan sebagai

dimana adalah konjugat-konjugat dari .

**Contoh 2.10.** Hasilkali dalam Euclidean kompleks dari vektor-vektor

adalah

**Teorema 2.4.** *(Sifat-sifat Hasilkali Dalam Kompleks)*

*Jika dan adalah vektor-vektor pada , dan adalah sebarang bilangan kompleks, maka:*

1. *dan jika dan hanya jika .*

**Bukti :**

1. Misalkan dan untuk maka

dan

sehingga

 [Teorema 2.3 bagian a dan c]

 [Teorema 2.3 bagian e]

1. Misal , , dan untuk maka

1. Misalkan dan untuk , dan adalah sebarang bilangan kompleks maka

1. Misalkan untuk maka

Kesamaan berlaku jika dan hanya jika . Namun, hal ini benar jika dan hanya jika , yaitu jika dan hanya jika .

**Definisi 2.13. (Panjang dan Jarak pada )** Panjang Euclidean (Euclidean norm) dari vektor pada dinotasikan dengan yaitu

dan jarak Euclidean antara titik-titik dengan adalah

**Contoh 2.11.** Tentukan panjang dari vektor-vektor dan dan cari jarak antara vektor dan.

Jawab: panjang dari vektor dan

Jarak antara vektor dan adalah

**2.6 Ruang Hasilkali Dalam Kompleks**

**Definisi 2.14. (Hasilkali Dalam Kompleks)** Hasilkali dalam pada suatu ruang vektor kompleks adalah sebuah fungsi yang mengasosiasikan sebuah bilangan kompleks dengan setiap pasangan vektor dan pada , dengan cara sedemikian rupa sehingga aksioma-aksioma berikut ini terpenuhi untuk semua vektor danpada dan semua skalar .

1. dan

Ruang hasilkali dalam kompleks (***complex inner product space***) atau ruang uniter (***unitary space***) adalah sebuah ruang vektor kompleks yang memiliki sebuah hasilkali dalam. Sifat-sifat tambahan yang diturunkan dari keempat aksioma hasilkali dalam:

Di dalam ruang hasilkali dalam kompleks, **norma** atau **panjang** sebuah vektor ∈ adalah

dan **jarak** antara vektor dengan vektor didefinisikan sebagai

Sebuah vektor ∈ disebut vektor satuan jika .

**Contoh 2.12.** Misal dan adalah vektor-vektor pada ruang kompleks . Tunjukkan bahwa fungsi yang dinyatakan oleh adalah hasil kali dalam kompleks!

Jawab: kita tunjukkan bahwa keempat sifat dari hasil kali dalam kompleks tersebut terpenuhi.

1.

Sehingga jika hanya jika .

Karena semua sifat terpenuhi, adalah hasil kali dalam kompleks.

* 1. **Nilai Eigen dan Vektor Eigen**

**Definisi 2.15.** Elemen adalah nilai eigen dari matriks jika ada vektor taknol sehingga . Vektor dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen .

**Definisi 2.16.** (Diagonalisasi) Matriks dapat didiagonalisasi jika ada matriks nonsingular , sehingga untuk matriks diagonal .

**2.8 Ortogonal**

**Definisi 2.17.** Misalkan ruang hasilkali dalam. Dua vektor adalah **ortogonal** jika , dan dinotasikan dengan .

Sebuah himpunan bagian dari ruang hasilkali dalam adalah **himpunan ortogonal** jika , untuk setiap dengan .

**Contoh 2.13.** Diketahui: tentukan apakah himpunan merupakan himpunan ortogonal!

Jawab:

Karena dan dengan maka merupakan himpunan ortogonal.

Sebuah himpunan bagian dari ruang hasilkali dalam adalah **himpunan ortonormal** jika adalah himpunan ortogonal dan untuk setiap adalah vektor satuan atau bisa ditulis seperti berikut:

Himpunan adalah ortonormal jika

**2.9 Basis Ortonormal dan Proses Gram-Schmidt**

**Definisi 2.18.** Himpunan vektor dalam adalah himpunan ortonormal jika terdapat himpunan ortogonal dari vektor satuan. Basis ortonormal untuk subruang dari adalah basis dari dan merupakan himpunan ortonormal.

**Teorema 2.5** *Jika adalah sebuah basis ortonormal untuk sebuah ruang perkalian dalam dan adalah sebarang vektor di dalam , maka*

**Bukti :**

Karena adalah sebuah basis, maka sebuah vektor dapat dinyatakan dalam bentuk

Akan ditunjukkan bahwa untuk . Untuk setiap vektor di dalam kita memperoleh

Karena adalah sebuah himpunan orthonormal, maka diperoleh

 dan jika .

Sehingga persamaan diatas dapat disederhanakan menjadi

**Definisi 2.19.** Misal adalah sebuah basis untuk ruang bagian dari ruang hasilkali dalam . Sebuah basis ortonormal untuk dapat dinyatakan menggunakan **proses ortogonalisasi Gram-Schmidt** seperti berikut:

* 1. **Transpos Konjugat (*Conjugate Transpose*)**

**Definisi 2.20.** Jika adalah sebuah matriks yang memiliki entri-entri bilangan kompleks, maka **transpos konjugat (*conjugate transpose*)** matriks , yang dinotasikan dengan , didefinisikan sebagai

di mana adalah sebuah matriks yang entri-entrinya adalah konjugat-konjugat kompleks dari entri-entri yang bersesuaian pada matriks dan adalah transpos dari matriks .

**Contoh 2.14.** Jika , maka

 sehingga

**Teorema 2.6** (Sifat-sifat Transpos Konjugat)

*Jika dan adalah matriks-matriks dengan entri-entri bilangan kompleks dan adalah sebarang bilangan kompleks, maka:*

* 1. **Transformasi Linear**

**Definisi 2.21.** Transformasi linear (atau pemetaan linear) adalah pemetaan sehingga untuk setiap dan , dipenuhi aksioma berikut:

1. ,

2. ,

Kedua aksioma di atas dapat disingkat menjadi satu aksioma berikut:

 dan untuk setiap dan skalar.

 disebut domain dari transformasi linear .

 disebut kodomain dari transformasi linear .

* 1. **Similar**

**Definisi 2.22.** Matriks dikatakan **similar** dengan matriks jika ada matriks non singular sehingga .

**Definisi 2.23.** Suatu sifat matriks bujursangkar disebut sebagai **invarian similar** (*similarity invariant*) atau **invariant di bawah similar** (*invariant under similarity*) apabila sifat tersebut dimiliki bersama oleh dua matriks similar sebarang.

**Tabel 2.1. Invarian-invarian similaritas**

|  |  |
| --- | --- |
| **Sifat**  | **Deskripsi** |
| Determinan  |  dan memiliki determinan yang sama. |
| Keterbalikan  |  dapat dibalik jika dan hanya jika dapat dibalik. |
| Rank  |  dan memiliki rank yang sama. |
| Nulitas |  dan memiliki nulitas yang sama.  |
| Trace  |  dan memiliki trace yang sama. |
| Polinomial karakteristik |  dan memiliki polinomial karakteristik yang sama. |
| Nilai eigen |  dan memiliki nilai eigen yang sama. |
| Dimensi ruang eigen | Jika adalah sebuah nilai eigen dari dan , maka ruang eigen dari yang terkait dengan dan ruang eigen dari yang terkait dengan memiliki dimensi yang sama.  |