

**ANALISIS PERILAKU PENYELESAIAN  
PERSAMAAN DIFERENSIAL TUNDAAN**

**SKRIPSI**

Oleh:

**ASRUL KHASANAH**

NIM: 10321356



**JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA  
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN  
UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH PONOROGO**

**2014**



**ANALISIS PERILAKU PENYELESAIAN  
PERSAMAAN DIFERENSIAL TUNDAAN**

**SKRIPSI**

Diajukan kepada Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Muhammadiyah  
Ponorogo untuk memenuhi salah satu persyaratan guna memperoleh gelar Sarjana

Oleh:

**ASRUL KHASANAH**

NIM: 10321356

**JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA  
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN  
UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH PONOROGO**

**2014**



FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN  
UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH PONOROGO  
(STATUS TERAKREDITASI)  
Jl. Budi Utomo No. 10 Telp-(0352) 481124  
Ponorogo 63471

---

### HALAMAN PERSETUJUAN

Skripsi oleh Asrul Khasanah, dengan judul ANALISIS PERILAKU PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL TUNDAAN, ini telah diperiksa dan disetujui untuk diuji.

Ponorogo, 22 Oktober 2014

Pembimbing,

Dr. Julan Hernadi, M.Si

NIP. 19670705 199303 1 003



FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN  
UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH PONOROGO  
(STATUS TERAKREDITASI)

Jl. Budi Utomo No. 10 Telp (0352) 481124

Ponorogo 63471

---

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi oleh Asrul Khasanah ini,

Telah dipertahankan di depan penguji pada tanggal 10 Desember 2014.

Dewan Penguji,

Dr. Julian HERNADI, M.Si  
NIP. 19670705 199303 1 003

Ketua

Erika Eka Santi, M.Si  
NIK. 19811212 200912 13

Anggota

Hafidh Jauhari, M.Pd  
NIK.

Anggota

Mengesahkan

Dekan

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan



Dr. Bambang Harmanto, M.Pd.  
NIP. 19710823 200501 1 001

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Asrul Khasanah

NIM : 10321356

Fakultas : Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Jurusan : Pendidikan Matematika

Judul Skripsi : Analisis Perilaku Penyelesaian Persamaan Diferensial Tundaan

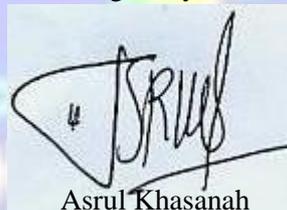
Menyatakan bahwa skripsi tersebut adalah karya saya sendiri dan bukan karya orang lain, baik sebagian maupun keseluruhan, kecuali dalam bentuk kutipan yang telah disebutkan sumbernya.

Selanjutnya apabila di kemudian hari ada klaim dari pihak lain, bukan menjadi tanggung jawab Dosen Pembimbing dan/ atau Pengelola Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Muhammadiyah Ponorogo, tetapi menjadi tanggung jawab saya sendiri.

Demikian surat pernyataan ini saya buat dengan sebenar-benarnya dan apabila pernyataan ini tidak benar, saya bersedia mendapat sanksi akademis.

Ponorogo, 22 Oktober 2014

Yang menyatakan,



Asrul Khasanah

## ABSTRAK

**Khasanah, Asrul. 2014.** Analisis Perilaku Penyelesaian Persamaan Diferensial Tundaan. Jurusan Pendidikan Matematika. Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan. Universitas Muhammadiyah Ponorogo. Pembimbing: Dr. Julian HERNADI, M.Si.

**Kata Kunci:** Penyelesaian, Waktu Tunda, Persamaan Diferensial Tundaan.

Salah satu bentuk khusus dari persamaan diferensial fungsional adalah persamaan diferensial tundaan, yaitu persamaan diferensial yang tidak hanya melibatkan waktu sekarang tetapi juga melibatkan beberapa waktu sebelumnya. Penelitian ini berkenaan dengan perilaku penyelesaian persamaan diferensial tundaan.

Pada penelitian ini dikaji secara matematis terbentuknya persamaan diferensial tundaan. Kemudian dilakukan analisis terhadap perilaku penyelesaian yang memenuhi persamaan diferensial tundaan tersebut dengan merubah persamaan diferensial yang diberikan menjadi persamaan karakteristik di mana akar-akar persamaan karakteristik yang diperoleh memiliki sifat yang berbeda-beda. Sifat-sifat tersebut digunakan untuk mengetahui gerak osilasi dari penyelesaian yang dihasilkan dan mengidentifikasi kestabilan titik kesetimbangan dari persamaan diferensial tundaan linier orde satu berdasarkan definisi serta teorema-teorema yang berlaku di dalamnya. Selanjutnya, konsep-konsep teoritis yang telah diperoleh tersebut diterapkan pada model persamaan Hutchinson.

Berdasarkan penelitian ini diketahui bahwa parameter tundaan waktu  $\tau$  memiliki peran yang sangat dominan terhadap perubahan perilaku penyelesaian persamaan diferensial tundaan. Suatu penyelesaian dari persamaan diferensial linier orde satu berbentuk  $y'(t) = -ay(t - \tau)$  dapat mengalami osilasi apabila syarat cukup dan perlu  $a\epsilon\tau > 1$  dipenuhi, dan untuk kasus selainnya penyelesaian tersebut tidak berhasil. Di samping itu, waktu tunda juga dapat menyebabkan perubahan kestabilan penyelesaian kesetimbangan (*steady state*) pada model persamaan Hutchinson. Penyelesaian kesetimbangan di  $K$  pada persamaan Hutchinson adalah stabil asimtotik apabila nilai tundaan waktu  $0 \leq \tau < \pi/2r$  dengan  $r$  adalah laju pertumbuhan intrinsik. Secara umum, jika waktu tundanya diperbesar melebihi  $\pi/2r$  maka penyelesaian kesetimbangan  $K$  menjadi tidak stabil, di mana dalam kasus ini terjadi transisi dari kondisi yang stabil menjadi tidak stabil. Titik transisi yang menyebabkan perubahan kestabilan ini terjadi ketika nilai  $\tau = \pi/2r$ , dan nilai di titik ini dikenal sebagai titik bifurkasi Hops.

## PRAKATA

Segala puji serta syukur kehadiran Allah SWT, sang penguasa serta rajanya dari segala raja makhluk yang ada di muka bumi, yang telah memberikan kemudahan kepada penulis untuk menyelesaikan tugas akhir ini dengan lancar dan tanpa aral suatu apapun. Sholawat serta salam semoga senantiasa selalu tercurahkan kepada Nabi akhir zaman yaitu Muhammad SAW, yang telah membawa syariat Islam sebagai petunjuk hidup bagi umat manusia di dunia maupun di akhirat.

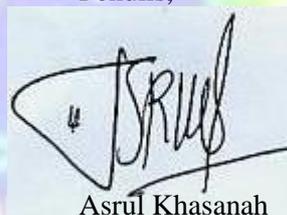
Segenap daya dan upaya telah penulis curahkan dalam rangka penulisan skripsi ini guna memenuhi tugas akhir program studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Muhammadiyah Ponorogo dengan judul **“Analisis Perilaku Penyelesaian Persamaan Diferensial Tundaan”**. Namun penulis menyadari bahwa banyak pihak yang terlibat dalam penulisan skripsi ini. Oleh karena itu pada kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada beberapa pihak yang telah ikut berkontribusi dalam penyelesaian skripsi ini, baik secara langsung maupun tidak langsung, terutama kepada:

1. Drs. H. Sulton, M.Si selaku Rektor Universitas Muhammadiyah Ponorogo.
2. Bambang Harmanto, M.Pd selaku Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Muhammadiyah Ponorogo.
3. Dr. Julan Hernadi, M.Si selaku Ketua Jurusan Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Ponorogo, sekaligus sebagai Dosen Pembimbing yang dengan sabar telah bersedia meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, pengarahan, serta dukungan yang kuat selama penulisan skripsi berlangsung.
4. Bapak/Ibu Dosen Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Muhammadiyah Ponorogo beserta stafnya atas ketelatenannya membagikan ilmu dan pengalaman yang dimiliki,
5. Kedua orang tua (Bapak Suratman dan Ibu Suratmi) yang selalu memberikan doa yang tulus serta motivasi yang tinggi, baik secara moral maupun spiritual demi keberhasilan penulis, serta

kedua ananda (Mustakim Firdaus dan Muhammad Yasin) yang telah menjadikan hari – hari penulis lebih berwarna.

6. Kakanda Ferdi Irwansyah, S.E. yang senantiasa memberikan motivasi dan dorongan kepada penulis serta bersedia menjadi tempat berbagi dan diskusi.
7. Keluarga besar Himpunan Mahasiswa Islam (HMI) Cabang Ponorogo dan Badan Pengelola Latihan yang telah menjadi kawan berjuang penulis dalam menjalani proses belajar di kampus kedua Insan Cita.
8. Teman-teman angkatan 2010 program studi matematika kelas B, dan teman senasib seperjuangan terutama Ika Tri Munawarah dan Rian Juppeny yang telah menjadi teman sharing dan berbagi motivasi.
9. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu di sini, yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Ponorogo, 22 Oktober 2014  
Penulis,



Asrul Khasanah

## **Motto**

*“Sesungguhnya beserta kesulitan itu ada kemudahan, maka apabila kamu telah selesai  
(dari suatu urusan) kerjakanlah dengan sungguh-sungguh urusan yang lain  
dan hanya kepada Allahlah hendaknya kamu berharap”*

*(QS. Al Insyiroh : 6-8)*

*“Sesungguhnya Allah tidak akan mengubah suatu keadaan yang ada pada diri mereka,  
kecuali mereka sendiri yang mengubahnya”*

*(QS. Al-Rad : 11)*

*“Jangan biarkan sedetik waktu berlalu tanpa tambahan ilmu”*

*(Dr. Julan Hernadi, M.Si)*

*“Mengajar adalah cara belajar yang terbaik “*

*(Penulis)*



## DAFTAR ISI

|  | Halaman |
|--|---------|
| HALAMAN JUDUL.....   | i       |
| LOGO .....   | ii      |
| HALAMAN PENGAJUAN .....  | iii     |
| HALAMAN PERSETUJUAN .....  | iv      |
| HALAMAN PENGESAHAN .....   | v       |
| PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN .....  | vi      |
| ABSTRAK .....  | vii     |
| KATA PENGANTAR .....   | viii    |
| MOTTO .....  | x       |
| DAFTAR ISI.....  | xi      |
| DAFTAR NOTASI.....   | xii     |
| DAFTAR GAMBAR .....  | xiii    |
| <b>BAB I PENDAHULUAN</b>   |         |
| 1.1. Latar belakang masalah .....  | 1       |
| 1.2. Batasan masalah .....   | 2       |
| 1.3. Rumusan masalah .....   | 3       |
| 1.4. Tujuan Penelitian .....   | 3       |
| 1.5. Manfaat Penelitian .....  | 3       |
| 1.6. Metodologi penelitian .....   | 3       |
| 1.7. Sistematika Penulisan .....   | 5       |
| <b>BAB II KAJIAN TEORI</b>   |         |
| 2.1. Persamaan Diferensial Tundaan .....                                     | 6       |
| 2.2. Kestabilan dan Kestabilan.....  | 19      |
| <b>BAB III PEMBAHASAN</b>  |         |
| 3.1. Perilaku penyelesaian persamaan diferensial tundaan .....               | 20      |
| 3.2. Penerapan persamaan diferensial tundaan pada persamaan Hutchinson ..... | 35      |
| <b>BAB IV PENUTUP</b>  |         |
| 4.1. Kesimpulan.....   | 50      |
| 4.2. Saran .....   | 51      |
| DAFTAR PUSTAKA .....   | 52      |

## DAFTAR NOTASI

| NOTASI             | KETERANGAN   |
|--------------------|--|
| $\forall$          | Untuk Setiap   |
| $\in$              | Elemen dari  |
| $\infty$           | Tak berhingga  |
| $\leq/\geq$        | Kurang/lebih dari sama dengan                        |
| $\varepsilon$      | Epsilon  |
| $\delta$           | Delta  |
| $C([a, b], R^n)$   | Fungsi kontinu yang dipetakan dari $[a, b]$ ke $R^n$ |
| $\tau$             | Nilai tundaan waktu (tau)                            |
| $\lambda$          | (lamda) akar-akar persamaan karakteristik            |
| $R_e(\lambda)$     | Bagian real dari $\lambda$ (lamda)                   |
| $I_m(\lambda)$     | Bagian Imajiner dari $\lambda$ (lamda)               |
| $ z $              | Modulus bilangan kompleks                            |
| $N^*$              | Titik kesetimbangan                                  |
| $\ \bullet\ $      | Norm ruang Euclid                                    |
| $\ \bullet\ _\tau$ | Norm ruang banach                                    |
| $ \bullet $        | Nilai mutlak   |
| $\setminus$        | Selain   |
| $\{\bullet\}$      | Himpunan   |
| $R$                | Himpunan semua bilangan real                         |
| $N$                | Himpunan semua bilangan Asli                         |
| $\eta$             | Nu   |
| $\subset$          | Himpunan bagian                                      |
| $\exists$          | Terdapat   |
| $f'$               | Fungsi terdiferensial                                |
| $\sum$             | Jumlah   |

## DAFTAR GAMBAR

|   | Halaman |
|---|---------|
| <b>Gambar 2.1.</b> Masalah nilai awal PD tundaan.....   | 8       |
| <b>Gambar 2.2.</b> Definisi fungsi $y_t(\theta)$ .....  | 9       |
| <b>Gambar 2.3.</b> Penyelesaian dari $y'(t) = -y(t - \frac{\pi}{2})$ .....  | 12      |
| <b>Gambar 2.4.</b> Penyelesaian $y'(t) = y(t - 1)$ menggunakan metode step .....                                    | 18      |
| <b>Gambar 3.1.</b> Akar persamaan karakteristik $\lambda + \beta e^{-\lambda} = 0$ untuk $\beta < 0$ .....          | 22      |
| <b>Gambar 3.2.</b> Akar persamaan karakteristik $\lambda + \beta e^{-\lambda} = 0$ untuk $\beta = e^{-1}$ .....     | 23      |
| <b>Gambar 3.3.</b> Akar persamaan karakteristik $\lambda + \beta e^{-\lambda} = 0$ untuk $\beta > e^{-1}$ .....     | 24      |
| <b>Gambar 3.4.</b> Akar persamaan karakteristik $\lambda + \beta e^{-\lambda} = 0$ untuk $0 < \beta < e^{-1}$ ..... | 25      |
| <b>Gambar 3.5.</b> Penyelesaian PDB $y'(t) = -y(t)$ dengan nilai awal $y(0) = 1$ .....                              | 31      |
| <b>Gambar 3.6.</b> Penyelesaian PDT $y'(t) = -y(t - 0.25)$ dengan $\phi_0(t) = 1$ .....                             | 32      |
| <b>Gambar 3.7.</b> Penyelesaian PDT $y'(t) = -y(t - 0.6)$ dengan $\phi_0(t) = 1$ .....                              | 33      |
| <b>Gambar 3.8.</b> Penyelesaian PDT $y'(t) = -y(t - 1)$ dengan $\phi_0(t) = 1$ .....                                | 34      |
| <b>Gambar 3.9.</b> Penyelesaian PDT $y'(t) = -y(t - 1.5)$ dengan $\phi_0(t) = 1$ .....                              | 34      |
| <b>Gambar 3.10.</b> Penyelesaian PDT $y'(t) = -y(t - 1.57)$ dengan $\phi_0(t) = 1$ .....                            | 34      |
| <b>Gambar 3.11.</b> Penyelesaian PDT $y'(t) = -y(t - 2)$ dengan $\phi_0(t) = 1$ .....                               | 35      |
| <b>Gambar 3.12.</b> Ilustrasi titik kesetimbangan $N^*$ yang stabil .....   | 37      |
| <b>Gambar 3.13.</b> Ilustrasi titik kesetimbangan $N^*$ yang stabil asimtotik.....                                  | 38      |
| <b>Gambar 3.14.</b> Ilustrasi titik kesetimbangan $N^*$ yang tidak stabil .....                                     | 38      |
| <b>Gambar 3.15.</b> Penyelesaian persamaan $\bar{N}_1(t) = \bar{N}_{10} e^{rt}$ untuk $r = 0$ .....                 | 40      |
| <b>Gambar 3.16.</b> Penyelesaian persamaan $\bar{N}_1(t) = \bar{N}_{10} e^{rt}$ untuk $r < 0$ .....                 | 40      |
| <b>Gambar 3.17.</b> Penyelesaian persamaan $\bar{N}_1(t) = \bar{N}_{10} e^{rt}$ untuk $r > 0$ .....                 | 41      |
| <b>Gambar 3.18.</b> Kondisi setimbang stabil asimtotik pada persamaan Hutchinson ....                               | 47      |

**Gambar 3.19.** Kondisi setimbang tidak stabil pada persamaan Hutchinson ..... 48

**Gambar 3.20.** Kondisi bifurkasi hops di titik setimbang persamaan Hutchinson ... 49

