PERSAMAAN RELASI REKURENSI PADA PERHITUNGAN NILAI DETERMINAN MATRIKS MENGGUNAKAN METODE EKSPANSI LAPLACE DAN METODE CHIO

Sintia Dewi Ratna Sari

Mahasiswa Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Ponorogo

Email: tea_cin30@yahoo.co.id

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui persamaan relasi rekurensi fungsi jumlah dari operasi perkalian dan operasi penjumlahan nilai determinan matriks menggunakan metode ekspansi Laplace dan metode Chio, kemudian dari kedua metode itu dibandingkan operasi penjumlahan dan perkaliannya pada setiap tahap mana yang lebih sederhana diantara keduanya untuk ordo 3, ordo 4, dan ordo 5. Metode ekspansi Laplace adalah metode untuk menghitung determinan matriks menggunakan kofaktor yaitu menjumlahkan hasil kali setiap entri-entri baris ke-i atau kolom ke-j dengan kofaktornya. Proses ekspansi akan berhenti sampai diperoleh ordo 2×2. Sedangkan metode Chio adalah metode Chio yaitu metode menghitung determinan matriks dimana untuk posisi pada baris pertama kolom pertama yaitu $a_{11} \neq 0$, kemudian misal diberikan matriks D yang didapatkan dengan mengganti setiap element a_{ij} pada $A_{(1)(1)}$ oleh $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}$.

Berdasarkan penelitian ini, diperoleh persamaan relasi rekurensi untuk metode ekspansi Laplace yaitu jumlah operasi penjumlahan $j_n = 1(n+1)+1$ dan jumlah operasi perkalian $p_n = 2(n+1)+(n+1)$. Sedangkan dengan metode Chio jumlah operasi penjumlahanya $j_n = 1+(n.n)$ dan jumlah operasi perkaliannya yaitu $p_n = 2(n^2)+2(n-1^2)+\cdots+2(1)+1$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa metode ekspansi Laplace ordo 3 membutuhkan 15 operasi penjumlahan dan perkalian, ordo 4 membutuhkan 57 operasi penjumlahan dan perkalian, dan ordo 5 membutuhkan 291 operasi penjumlahan dan perkalian. Sedangkan metode Chio ordo 3 membutuhkan 16 operasi penjumlahan dan perkalian, ordo 4 membutuhkan 43 operasi penjumlahan dan perkalian, dan ordo 5 membutuhkan 91 operasi penjumlahan dan perkalian, sehingga metode Chio lebih sederhana dibandingkan dengan metode ekspansi Laplace untuk menentukan nilai determinan matriks secara manual dengan ordo lebih dari 3.

Kata kunci : Metode Ekspansi Laplace, Metode Chio, Determinan Matriks, Barisan dengan Relasi Rekurensi

PENDAHULUAN

Salah satu cabang ilmu matematika yang sangat penting adalah Aljabar. Aljabar berasal dari Bahasa Arab yaitu *"al-jabr"* yang berarti "pertemuan atau hubungan atau penyelesaian". Penemu Aljabar adalah Abu Abdullah Muhammad Ibn Musa al-Khwarizmi. Ilmu matematika juga dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah dunia nyata yaitu dalam bidang ekonomi, statistik, biologi, ataupun yang lainnya. Untuk cabang matematika yang lain yaitu Analisis, Persamaan Differensial, Geometri, Teori Graph, maupun Matematika Terapan. Dalam Aljabar memiliki pokok permasalahan untuk dikembangkan lebih lanjut lagi, salah satunya yaitu Aljabar Linear.

Determinan adalah satu pokok bahasan yang termasuk dalam Aljabar Linear. Determinan digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan Aljabar Linear, antara lain mencari invers matriks, menentukan persamaan karakteristik suatu permasalahan dalam menentukan nilai eigen, dan untuk menyelesaikan persamaan linear.

Perhitungan nilai determinan matriks yang diketahui selama ini yaitu metode Sarrus dan ekspansi kofaktor atau ekspansi Laplace. Metode Sarrus digunakan untuk matriks ordo 2×2 dan 3×3. Sedangkan untuk ordo lebih dari 3 biasanya digunakan ekspansi kofaktor yaitu pengambilan baris atau kolom sebarang, setelah itu dijumlahkan. Ekspansi kofaktor atau ekspansi Laplace merupakan perluasan dari kofaktor, karena dalam perhitungan determinan dengan ini memuat kofaktor dari baris atau kolom sebarang. Metode lain untuk menghitung determinan matriks selain metode Sarrus dan ekspansi kofaktor atau Laplace juga digunakan operasi baris elementer (OBE), operasi kolom elementer (OKE), dan gabungan dari OBE dengan ekspansi kofaktor tersebut.

Berdasarkan penelitian sebelumnya mengenai perhitungan determinan matriks oleh Armend Salihu diperoleh *New Method to Calculate Determinants of* $n \times n$ $(n \geq 3)$ *Matrix, by Reducing Determinants to 2nd order* pada tahun 2012 dan *New Method to Compute the Determinant of* 4×4 *Matrix*, dan juga penelitian yang dilakukan oleh Dardan Hajrizaj diperoleh *New Method to Compute the Determinant of 3×3 Matrix* pada tahun 2009. Dalam pembahasan ini akan dibahas tentang persamaan relasi rekurensi jumlah pada operasi penjumlahan dan operasi perkalian pada ordo 3, ordo 4, dan ordo 5 menggunkan metode ekspansi Laplace dan metode Chio. Dari kedua metode tersebut akan dibandingkan jumlah operasi penjumlahan dan operasi perkalian menggunakan persamaan relasi rekurensi yang dilakukan secara manual. Jika ordonya semakin besar maka waktu yang dibutuhkan juga lama, sehingga pada pembahasan ini akan dibahas mana yang lebih sederhana apakah metode ekspansi Laplace atau metode Chio. Untuk perhitungan yang dilakukan pada komputer menggunakan algoritma untuk ordo yang besar membutuhkan memori yang besar, namun dalam pembahasan ini hanya akan dibahas untuk perhitungan secara manual saja.

Berdasarkan permasalahan di atas, terlihat bahwa betapa pentingnya suatu perhitungan determinan matriks untuk ordo yang besar. Oleh karena itu, dalam skripsi ini penulis mengambil judul "Persamaan Relasi Rekurensi pada Perhitungan Nilai Determinan Matriks Menggunakan Metode Ekspansi Laplace dan Metode Chio".

RUMUSAN MASALAH

Berdasarkan latar belakang di atas, dapat dirumuskan permasalahan sebagai berikut:

1. Bagaimana membuktikan metode ekspansi Laplace untuk menghitung determinan matriks?
2. Bagaimana persamaan relasi rekurensi jumlah fungsi pada operasi penjumlahan dan perkalian dalam menentukan determinan matriks menggunakan metode ekspansi Laplace?
3. Bagaimana membuktikan metode Chio untuk menghitung determinan matriks?
4. Bagaimana persamaan relasi rekurensi jumlah fungsi pada operasi penjumlahan dan perkalian dalam menentukan determinan matriks menggunakan metode Chio?
5. Bagaimana perbandingan metode ekspansi Laplace dan metode Chio dilihat dari jumlah operasi penjumlahan dan operasi perkalian?

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penulisan ini adalah penelitian kepustakaan atau riset kepustakaan (*library research*). Riset kepustakaan atau sering juga disebut studi pustaka ialah serangkaian kegiatan yang berkenaan dengan metode pengumpulan data pustaka, membaca dan mencatat serta mengolah bahan penelitian. (Zed, 2008: 3). Sedangkan menurut M. Nazir dalam bukunya yang berjudul 'Metode Penelitian' mengemukakan bahwa yang dimaksud dengan Studi kepustakaan adalah teknik pengumpulan data dengan mengadakan studi penelaahan terhadap buku-buku, literatur-literatur, catatan-catatan, dan laporan-laporan yang ada hubungannya dengan masalah yang dipecahkan.

Data yang diperlukan dalam penelitian ini adalah data yang meliputi tentang matrik dan proses perhitungan determinan matriks. Informasi untuk penelitian ini dikumpulkan dari buku-buku acuan pada buku Aljabar Linear, Determinan, jurnal-jurnal dan artikel di internet mengenai matrik dan determinan matriks. Buku acuan yang digunakan adalah Elementary Matrix Theory (2003) dan Aljabar Linear Matriks (2012), Aljabar Linear dengan Penerapannya (1993), Matriks versi (1984), dan Aljabar Linear Elementer versi aplikasi jilid 1 (2005) untuk konsep dasar matriks dan determinan.

Pengumpulan data merupakan salah satu proses pengadaan data untuk keperluan penelitian. Pengumpulan data adalah prosedur yang sistematis dan standar untuk memperoleh data yang diperlukan. Untuk memperoleh data, penulis menggunakan langkah-langkah *Library Research* yaitu setiap penelitian memerlukan bahan yang bersumber dari perpustakaan. Penulis menggunakan metode dokumenter, yaitu mencari data mengenai catatan, buku-buku, jurnal penelitian yang relevan dengan permasalahan yang penulis bahas.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan penulis dalam menganalisis data adalah sebagai berikut:

1. Merumuskan masalah yang akan dibahas.
2. Mengumpulkan dan memahami berbagai literatur yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dengan cara membaca dan menelaah materi yang berkaitan. Dalam hal ini, literatur yang digunakan, berupa buku-buku yang berkaitan dengan matriks dan determinan matriks.
3. Menyelesaikan permasalahan dengan menggunakan Metode Ekspansi Laplace dan Chio serta dengan OBE ataupun OKE.
4. Membuat kesimpulan. Kesimpulan tersebut merupakan jawaban singkat dari permasalahan yang telah dipaparkan dalam pembahasan.

PEMBAHASAN

a. Determinan matriks dengan metode ekspansi Laplace

Perhitungan determinan matrik dengan $n \geq 3$ akan lebih sederhaan jika diselesaikan dengan metode Ekspansi Laplace yaitu suatu metode perhitungan determinan dengan menggunakan kofaktor atau perluasan dari kofaktor yaitu dengan menjumlahkan hasil kali setiap entri-entri baris ke$-i$ atau kolom ke$-j$ dengan kofaktornya

Definisi 2.1.13

Jika matrik A berukuran $n\,x\,n$, determinan matriks A didefinisikan dengan

$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\,(-1)^{1+j}\left|M_{1j}\right| atau$

$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\,C_{ij}$,

untuk $j = 1,2,3,..,n.$

(Cullen, 1993:106)

Teorema

Jika matriks B diperoleh dari matriks A dengan cara membawa baris (kolom) ke$-i$ melalui p baris (kolom) maka $det\ (B) = (-1)^p \det(A)$.

(Ayres, 1984:22)

Teorema (Ekspansi Laplace)

Determinan dari suatu matriks $A = [a_{ij}]$ adalah sama dengan jumlah perkalian elemen-elemen dari sembarang baris (kolom) dengan kofaktor-kofaktornya:

$$|A| = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$$

$$|A| = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$$

(Lipschutz, 2004:283)

Bukti Teorema Ekspansi Laplace:

- Misal diketahui matriks A yaitu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Mencari $|A| = |A^T|$
- Menetapkan matriks B yang diperoleh dengan cara memindahkan baris ke-i melalui $(i-1)$ baris yang pertama dan kolom ke-j melalui $(j-1)$ kolom yang pertama maka diperoleh

$$B = \begin{bmatrix} a_{ij} & \cdots & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1j} & \cdots & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2j} & \cdots & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{nj} & \cdots & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Karena melakukan 2 pemindahan yaitu baris dan kolom maka

$$|B| = (-1)^{i-1}(-1)^{j-1}|A| = (-1)^{i-1+j-1}|A| = (-1)^{i+j}|A|$$

Dapat dilihat bahwa elemen dalam matriks B posisi baris pertama kolom pertama yaitu a_{ij} dan minor a_{ij} adaalah tepat minor dari a_{ij} pada A. sehingga, suku-suku $|B| = (-1)^{i+j}|A|$ adalah semua suku dari determinan A yang memiliki a_{ij} sebagai faktor. Maka determinan matriks awal yaitu determinan matriks A adalah

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,(-1)^{i+j}|M_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,C_{ij}$$

b. Penggunaan persamaan relasi rekurensi pada metode ekspansi Laplace pada matriks ordo 3, 4, dan 5

Untuk matriks ordo 2 terdapat 2 operasi perkalian dan 1 operasi penjumlahan, ordo 3 terdapat 9 operasi perkalian dan 4 operasi penjumlahan, ordo 4 terdapat 40 operasi perkalian dan 17 operasi penjumlahan, dan ordo 5 terdapat 205 operasi perkalian dan 86 operasi penjumlahan. Dengan relasi rekurensi dapat ditulis seperti dibawah ini :

a. Operasi penjumlahan

Misal j_n adalah jumlah operasi penjumlahan matriks dengan ordo $n+1$, maka

$j_1 = 1$
$j_2 = 4$
$\quad = j_1.3 + 1$
$j_3 = 17$
$\quad = j_2.4 + 1$
$j_4 = 86$
$\quad = j_3.5 + 1$

Maka solusi umum persamaan relasi rekurensinya untuk jumlah operasi penjumlahan yaitu

$$j_n = 1(n+1) + 1$$

b. Operasi perkalian

Misal p_n adalah jumlah operasi perkalian matriks dengan ordo $n+1$, maka

$p_1 = 2$
$p_2 = 9$
$\quad = p_1.3 + 3$
$p_3 = 40$
$\quad = p_2.4 + 4$
$p_4 = 205$
$\quad = p_3.5 + 5$

Maka solusi umum persamaan relasi rekurensinya untuk jumlah operasi perkalian yaitu

$$p_n = 2(n+1) + (n+1)$$

c. Determinan matriks menggunakan metode Chio

Theorema Metode Chio

Misalkan A=$[a_{ij}]$ adalah matriks bujursangkar ordo n x n, dan anggap $a_{11} \neq 0$. Diberikan D yang dinotasikan sebagai matrik yang didapatkan dengan mengganti setiap element a_{ij} pada $A_{(1)(1)}$ oleh $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}$ maka

$$|A| = \frac{D}{{a_{11}}^{n-2}}$$

$$= \frac{1}{{a_{11}}^{n-2}} |D|$$

$$= \frac{1}{{a_{11}}^{n-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

(Eves, 1996:130)

Bukti :

Diketahui matriks A berordo n x n yaitu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Maka kalikan setiap kolom kedua dengan a_{11} kecuali kolom pertama.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{11}a_{12} & \cdots & a_{11}a_{1n} \\ a_{21} & a_{11}a_{22} & \cdots & a_{11}a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{11}a_{n2} & \cdots & a_{11}a_{nn} \end{bmatrix} = {a_{11}}^{n-1} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

sehingga dapat ditulis

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{11}a_{12} & \cdots & a_{11}a_{1n} \\ a_{21} & a_{11}a_{22} & \cdots & a_{11}a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{11}a_{n2} & \cdots & a_{11}a_{nn} \end{bmatrix}}{{a_{11}}^{n-1}}$$

Dengan melakukan operasi baris elementer **selain kolom pertama** yaitu $(-a_{12})$ *dikalikan dengan kolom pertama ditambah dengan kolom kedua* [(-12).I -II], begitu seterusnya tergantung pada kolom berapa, sehingga kita mendapatkan :

$$= \frac{1}{{a_{11}}^{n-1}} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) & \cdots & (a_{11}a_{2n} - a_{n1}a_{1n}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & (a_{11}a_{n2} - a_{n1}a_{12}) & \cdots & (a_{11}a_{nn} - a_{n1}a_{1n}) \end{vmatrix}$$

Menggunakan ekspansi Laplace sepanjang baris pertama diperoleh

$$= \frac{1}{{a_{11}}^{n-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{n2} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

d. Penggunaan persamaan relasi rekurensi pada metode Chio untuk matriks ordo 3, 4, dan 5

Pada matriks ordo 2 terdapat 2 operasi perkalian dan 1 operasi penjumlahan, ordo 3 terdapat 11 operasi perkalian dan 5 operasi penjumlahan, ordo 4 terdapat 29 operasi perkalian dan 14 operasi penjumlahan, dan ordo 5 terdapat 61 operasi perkalian dan 30 operasi penjumlahan. Dengan relasi rekurensi dapat ditulis seperti dibawah ini :

a. Operasi penjumlahan

Misal j_n adalah jumlah operasi penjumlahan matriks untuk ordo $n+1$, maka :,

$j_1 = 1$

$j_2 = 5$

$= j_1 + (n.n)$

$j_3 = 14$

$= j_2 + (n.n)$

$j_4 = 30$

$= j_3 + (n.n)$

Maka solusi umum persamaan relasi rekurensinya untuk jumlah operasi perkalian yaitu

$$j_n = 1 + (n^2)$$

b. Operasi perkalian

Misal p_n adalah jumlah operasi perkalian matriks dengan ordo $n + 1$, maka

$p_1 = 2$

$p_2 = 11$

$= p_1(n^2) + 2((n-1)^2) + 1$

$p_3 = 29$

$= p_2(n^2) + 2((n-1)^2) + 2((n-2)^2) + 1$

$p_4 = 61$

$= p_2(n^2) + 2((n-1)^2) + 2((n-2)^2) + 2((n-3)^2) + 1$

Maka solusi umum persamaan relasi rekurensinya untuk jumlah operasi perkalian yaitu

$$p_n = 2(n^2) + 2((n-1)^2) + 2((n-2)^2) + \cdots + 2(1) + 1$$

e. Perbandingan Metode Ekspansi Laplace dan Metode Chio berdasarkan dari Jumlah Operasi Penjumlahan dan Perkalian

Jumlah operasi penjumlahan dan perkalian dapat disajikan dalam table di bawah ini dari matriks ordo 3, ordo 4, dan ordo 5 yaitu :

	Ordo	Operasi Hitung		Total penjumlahan dan perkalian
		Perkalian	Penjumlahan	
Metode ekspansi Laplace	3×3	9	4	13
	4×4	40	17	57
	5×5	205	86	291
Metode Chio	3×3	11	5	16
	4×4	29	14	43
	5×5	61	30	91

Tabel Perbandingan menghitung Determinan matriks dengan Metode Ekspansi Laplace dan Metode Chio

Berdasarkan tabel di atas perhatikan pada kolom total penjumlahan dan perkalian. Untuk metode ekspansi Laplace ordo 3 membutuhkan 13 operasi penjumlahan dan perkalian, ordo 4 membutuhkan 57 operasi penjumlahan dan perkalian, dan ordo 5 membutuhkan 291 operasi penjumlahan dan perkalian. Sedangkan metode Chio ordo 3 membutuhkan 16 operasi penjumlahan dan perkalian, ordo 4 membutuhkan 43 operasi penjumlahan dan perkalian, dan ordo 5 membutuhkan 91 operasi penjumlahan dan perkalian. Sehingga secara intuitif terlihat bahwa metode Chio lebih sederhana dibandingkan dengan metode ekspansi Laplace.

Metode ekspansi Laplace dan metode Chio dapat disajikan menggunakan Ms. excel untuk menghitung determinan matriks berdasarkan solusi umum dari kedua metode, yaitu :

No.	Ordo	Metode Laplace		Metode Chio	
		Penjumlahan	Perkalian	Penjumlahan	Perkalian
1	3	4	9	5	11
2	4	17	40	14	29
3	5	86	205	30	61
4	6	517	1236	55	111
5	7	3620	8660	91	183
6	8	28961	69288	140	281
7	9	260650	623601	204	409
dst					

Tabel Perbandingan Metode Ekspansi Laplace dan Metode Chio menggunakan Ms. Excel

Dari tabel diatas dapat dilihat bahwa metode Chio lebih sederhana utuk operasi penjumlahannya dan perkaliannya lebih sedikit dibandingkan dengan metode ekspansi Laplace untuk ordo lebih dari 3.

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan rumusan masalah dan batasan masalah serta uraian pada pembahasan bahwa penelitian ini bertujuan untuk mencari solusi persamaan relasi rekurensi dari ordo 3, ordo 4, dan ordo 5 menggunakan metode ekspansi Laplace dan metode Chio. Metode ekspansi Lapalce yaitu metode untuk menghitung determina matriks dengan memilih baris atau kolom sebarang untuk diekspansi, kemudian mengalikan elemen a_{ij} dengan kofaktornya yaitu C_{ij} sampai diperoleh matriks yang di dalamnya berordo 2. Sedangkan untuk metode Chio yaitu metode menghitung determinan matriks dimana untuk posisi pada baris pertama kolom pertama yaitu $a_{11} \neq 0$, kemudian misal diberikan matriks D yang didapatkan dengan mengganti setiap element a_{ij} pada $A_{(1)(1)}$ oleh $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}$.

Dari ordo 3, ordo 4, dan ordo 5 diperoleh persaman relasi rekurensi dari jumlah operasi penjumlahan dan operasi perkalian. Untuk menentukan determinan matriks menggunakan metode ekspansi Laplace pada operasi penjumlahan dapat dicari dengan $j_n = 1(n+1) + 1$ dan operasi perkalian dapat dicari dengan $p_n = 2(n+1) + (n+1)$. Sedangkan dengan metode Chio untuk operasi penjumlahanya dapat dicari dengan $j_n = 1 + (n.n)$ dan operasi perkalian dapat dicari dengan $p_n = 2(n^2) + 2(n-1^2) + \cdots + 2(1) + 1$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa untuk metode ekspansi Laplace ordo 3 membutuhkan 15 operasi penjumlahan dan perkalian, ordo 4 membutuhkan 57 operasi penjumlahan dan perkalian, dan ordo 5 membutuhkan 291 operasi penjumlahan dan perkalian. Sedangkan metode Chio ordo 3 membutuhkan 16 operasi penjumlahan dan perkalian, ordo 4 membutuhkan 43 operasi penjumlahan dan perkalian, dan ordo 5 membutuhkan 91 operasi penjumlahan dan perkalian. Jadi metode Chio lebih sederhana dibandingkan dengan metode ekspansi Laplace untuk menentukan nilai determinan matriks secara manual dengan ordo lebih dari 3. Namun secara algoritma menggunakan komputer untuk ordo yang besar membutuhkan memori kecepatan yang besar. Oleh sebab itu, untuk menindaklanjuti penulisan ini, penulis sangat berharap adanya penelitian baru yang membahas tentang perhitungan determinan matriks untuk ordo yang lebih besar menggunakan computer serta mengkaji tentang metode Chio lebih detail lagi.

DAFTAR PUSTAKA

Anonim.1986. *Aljabar Linear*. Bandung : C.V Armico

Anton, Howard dan Chris Rorres. 2005. *Aljabar Linear Elementer versi Aplikasi Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.

Ayres, Frank. 1984. Matriks. Terjemahan oleh I Nyoman Susila. Jakarta : Erlangga.

Cullen, Charles G. 1993. *Aljabar Linier dengan Penerapannya.* Terjemahan oleh Bambang Sumantri. Jakarta: Erlangga.

Eves, Howard. 1966. *Elementary Matrix Theory*. Atlantic Avenue, Boston.

Ferrar, W.L. 1957. *A Text-Book of Determinants, Matrices, and Algebraic Forms*. London : Oxford University Press.

Hajrizaj, Dardan. 2009. *Journal of Algebra : New Method to Compute the Determinant of 3x3 Matrix*. Kosovo : University of Prishtina.

Herlim. 2007. *Metode Ekpansi Laplace dalam menentukan nilai suatu determinan Matriks*. Skripsi S-1 Jurusan Matematika, UIN Malang.

Lipschutz, Seymour. 2004. *Schaum's Outlines of Linear Algebra Si (Metric) Edition*. Associated Professor of Mathematics : Temple University.

Salihu, Armend. 2012. Journal of Algebra: *New Method to Calculate Determinants of* nxn $(n \geq 3)$ *Matrix, by Reducing Determinants to 2nd order*. Kosovo : University of Prishtina..

Salihu, Armend. TT. *New Method to Compute the Determinant of* $4x4$ *Matrix*. Kosovo : University of Prishtina.

Siang, Jong Jek. 2006. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. Yogyakata: C.V ANDI OFFSET.

Stroud, K.A. 1996. *Matematika untuk Teknik*. Terjemahan oleh Erwin Sucipto. Jakarta : Erlangga.

Sutojo, T.dkk. 2010. *Teori dan Aplikasi Aljabar Linear dan Matriks*. Yogyakarta: Andi ; Semarang : UDINUS.

Tang, K.T. 2007. *Mathematical Methods for Engineers and Scientist 1*. USA: Pacific Lutheran University.

Weld, Laenas Gifford. 1906. *Determinants*. New York: state University of Iowa.

Zed, Mestika. 2008. *Metodologi Penelitian Kepustakaan.* Jakarta : Yayasan Obor Indonesia.