METODE PELABELAN TOTAL SUPER SIMPUL AJAIB PADA GRAPH-GRAPH SIKEL BERORDO SAMA

Ika Tri Munawaroh *), Dr. Julan Hernadi, M.Si *)
Prodi Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Muhammadiyah Ponorogo

Abstrak

Pelabelan total super simpul ajaib (PTSSA) merupakan bentuk khusus dari pelabelan total simpul ajaib, yang mana pada PTSSA label-label terkecilnya terletak pada simpul-simpulnya. Selain pada graph tunggal, PTSSA juga dapat dimiliki oleh beberapa graph sejenis yang berordo sama. Salah satunya pada beberapa graph sikel berordo sama. Pada skripsi ini dibahas tentang metode yang digunakan untuk membentuk PTSSA pada beberapa graph sikel berordo sama. Dalam penelitian ini, hal pertama yang diperhatikan adalah adanya PTSSA pada graph tunggal yang akan diberi label. Kemudian dibuktikan keteraturan derajat dari simpul-simpulnya. Setelah itu, dasar-dasar pelabelan pada graph $r - teratur$ dianalogikan pada graph yang akan diberi label. Akhirnya, PTSSA dikonstruksi pada graph berordo sama sebanyak k. Berdasarkan penelitian ini, metode untuk membentuk PTSSA pada beberapa graph sikel berordo sama adalah sebagai berikut: 1. Ambil sebuah graph sikel lengkap dengan PTSSA nya, 2. Tentukan nilai bilangan ajaibnya, 3. Tentukan nilai k, 4. Ubah PTSSA pada graph sikel tunggal ke label alami, 5. Bentuk himpunan $M(k)$, 6. Gambar graph C_n sebanyak k dan beri label netral pada masing-masing graph tersebut berdasarkan anggota $M(k)$ sehingga terbentuk label netral pada C_n sebanyak k, 7. Ubah label pada kC_n dengan bilangan asli dengan aturan $\gamma_{kG}(c, v_i) = \lambda_{kG}(v_i) + \Lambda_c(v_i)$ dan $\gamma_{kG}(c, v_i v_j) = \lambda_{kG}(v_i, v_j) + \Lambda_c(v_i, v_j)$. Karena metode ini diperoleh dengan menurunkan dasar-dasar pelabelan dari graph teratur, maka metode ini hanya dapat diterapkan pada graph teratur yang memiliki PTSSA. Selain itu, pada skripsi ini juga diberikan beberapa graph yang dalam jumlah tunggalnya tidak memiliki PTSSA. Graph tersebut adalah graph yang memuat simpul terisolasi, graph lintasan P_n, dan graph roda W_n.

Kata Kunci : Pelabelan Total Super Simpul Ajaib, Metode Pelabelan Total Super Simpul Ajaib.

PENDAHULUAN

Dapat dikatakan bahwa Teori Graph berawal pada tahun 1736 ketika Leonhard Euler mempublikasikan bukunya mengenai pemecahan masalah Jembatan Königsberg yang berjudul *Solutio Problematis Ad Geometriam Situs Pertinentis*. Walaupun demikian, minat akan Teori Graph baru berkembang setelah tahun 1920 hingga akhirnya buku teks tentang Teori Graph muncul pada tahun 1936. Buku tersebut ditulis oleh Denes König dengan judul "*The Teory of Finite and Infinite Graphs*" yang diterjemahkan dari bahasa Jerman. Sejak itulah minat terhadap Teori Graph berkembang pesat.

Hal lain yang menarik dari teori graph adalah meskipun hanya berawal dari himpunan simpul dan himpunan sisi yang menghubungkan simpul-simpul tersebut, darinya bisa disusun bilangan-bilangan ajaib yang biasa disebut label ajaib. Masing-masing bilangan yang merupakan bilangan bulat positif akan diletakkan pada setiap simpul atau sisi-sisinya. Dalam buku Magic Graphs (Marr dan Wallis, 2013), inilah yang disebut pelabelan pada graph. Ketika bilangan tidak hanya diletakkan pada masing-masing simpul atau sisi saja tetapi terhadap keduanya, maka pelabelan ini disebut pelabelan total. Pelabelan pada graph pertama kali diperkenalkan oleh Sadlàčk (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970).

Menurut Stewart, sebuah graph terhubung disebut pelabelan ajaib jika label pada semua sisi yang terhubung dengan sebuah simpul v jumlahnya sama seperti ketika hal yang serupa diterapkan untuk semua simpul pada graph tersebut. Dimana semua label pada sisi tersebut adalah bilangan bulat yang berbeda. (Galli, 2012)

Selanjutnya, ketika jumlah dari label simpul dengan label semua sisi yang terhubung pada simpul tersebut adalah sama seperti saat hal serupa diterapkan untuk semua simpul pada graph tersebut, maka pelabelannya disebut pelabelan total simpul ajaib (PTSA). Sebaliknya, saat jumlah label sisi dengan label pada kedua simpul yang dihubungkan oleh sisi tersebut adalah sama seperti saat hal serupa diterapkan untuk semua sisi pada graph tersebut, maka pelabelannya disebut pelabelan total sisi ajaib. (Marr dan Wallis, 2013).

Selain itu, dalam sebuah penelitian yang berjudul Two new methods to obtain super vertex-magic total labelings of graphs (Gómez, 2008), pada pelabelan terhadap unsur-unsur graph juga dikenal pelabelan total super simpul ajaib (PTSSA), yaitu pelabelan total simpul ajaib di mana label terkecilnya terletak di salah satu simpulnya.

Banyak matematikawan yang telah mengadakan penelitian mengenai pelabelan total super simpul ajaib. Diantaranya adalah penelitian yang dilakukan oleh Mac Dougal, Miller, dan Sugeng dalam (Joseph A Gallian, 2012). Mereka menunjukkan bahwa C_n mempunyai PTSSA jika dan hanya jika n bernilai ganjil, dan tidak ada graph bipartit lengkap yang mempunyai pelabelan total simpul ajaib. Selain itu, mereka juga memberikan sebuah konjektur bahwa jika $n \equiv 0(mod\ 4)$, $n > 4$, maka K_n mempunyai sebuah PTSSA. Kemudian Gómez (2007) memunculkan sebuah proposisi bahwa jika G adalah sebuah graph $r - teratur$ yang mempunyai PTSSA dan k adalah sebuah bilangan bulat positif sedemikian hingga $\frac{(k-1)(r-1)}{2}$ adalah bilangan bulat, maka kG juga mempunyai PTSSA. Sebagai akibat dari proposisi ini, diperoleh bahwa jika n dan k adalah bilangan ganjil atau jika $n \equiv 0(mod 4)$ dan $n > 4$, maka kK_n mempunyai sebuah PTSSA. Akibat ini, oleh Gómez diperkuat dengan menunjukkan sebuah metode yang digunakan untuk membentuk PTSSA pada graph kK_n.

Dari proposisi yang diungkapkan oleh Gómez tersebut, dan berdasarkan fakta bahwa graph C_n merupakan graph $r - teratur$ serta untuk n ganjil graph C_n mempunyai PTSSA, maka kita mempunyai sebuah akibat yang lain, yaitu jika n dan k adalah bilangan ganjil, maka kC_n mempunyai sebuah PTSSA. Selanjutnya menimbulkan suatu permasalah baru yaitu, apakah metode yang digunakan untuk membentuk PTSSA pada graph kK_n juga dapat diterapkan pada graph kC_n, untuk suatu k bilangan bulat positif, dimana $\frac{(k-1)(r-1)}{2}$ menghasilkan bilangan bulat? Selain itu, graph apa saja yang memiliki dan yang tidak memiliki PTSSA? Pada skripsi ini akan dibahas mengenai hal tersebut.

HASIL PENELITIAN

Definisi 3.1 [Ribhan, 2004]. Sebuah PTSSA adalah sebuah PTSA dengan penambahan sifat,

$$\gamma(V) = \{1, 2, \dots, n\}$$

$$\gamma(E) = \{(n+1), (n+2), \dots, (n+m)\}$$

Sifat di atas menyiratkan bahwa label terkecilnya terletak pada simpul-simpulnya dan label terbesarnya terletak pada sisi-sisinya.

Teorema 3.1 [Gómes, 2007]. *Jika G mempunyai sebuah PTSSA, maka*

$$h = 2m + \frac{m(m+1)}{n} + \frac{(n+1)}{2}$$

Lemma 3.1 [Ribhan, 2004]. *Jika G mempunyai sebuah PTSA, maka*

$$m \geq \frac{2n}{3}$$

Akibat 3.1 [Ribhan, 2004]. *Jika G mempunyai PTSSA dengan konstanta ajaib h, maka*

$$h \geq \frac{41n+21}{18}$$

Akibat 3.2 [Ribhan, 2004]. *Jika G mempunyai sebuah PTSSA, maka $n|m(m+1)$ untuk n ganjil, dan $n|2m(m+1)$ untuk n genap.*

Teorema 3.2 [Ribhan, 2004]. *Jika sebuah graph $r-teratur$ yang berordo n mempunyai sebuah PTSSA maka n dan r mempunyai paritas yang berbeda dan*

$$Jika\ n \equiv 0 \bmod 8\ maka\ m \equiv 0 \bmod 4$$

$$Jika\ n \equiv 4 \bmod 8\ maka\ m \equiv 2 \bmod 4$$

Teorema 3.3 [Ribhan, 2004]. *Graph sikel C_n mempunyai PTSSA jika dan hanya jika n merupakan bilangan ganjil.*

Bukti: Andaikan $V(C_n) = x_1, x_2, \dots, x_n$. Ambil $\gamma = V(C_n) \to \mathbb{Z}^+$ dengan $\gamma(x_i) = i, i = 1, 2, \dots, n$. Didefinisikan label sisi $x_i x_{i+1}$ sebagai berikut,

$$\gamma(x_i x_{i+1}) = \begin{cases} 2n - \frac{i-1}{2}, untuk\ i\ ganjil \\ 2n - \frac{n-1}{2} - \frac{i}{2}, untuk\ i\ genap \end{cases} \quad (3.5)$$

($\rightarrow$) Jika graph sikel C_n mempunyai PTSSA maka n merupakan bilangan ganjil. Ambil $w(x_i)$ yaitu bobot dari masing-masing simpul pada sikel C_n, maka $w(x_1) = w(x_2) = \cdots = w(x_n) = h$. Berdasarkan definisi 2.37, cara lain untuk menghitung bobot dari setiap simpulnya adalah

$$w(x_i) = \gamma(x_i) + \gamma(x_{i-1}x_i) + \gamma(x_i x_{i+1})$$

Untuk i ganjil, suku yang kedua adalah pelabelan sisi untuk i genap dan suku ketika adalah pelabelan sisi untuk i ganjil. Sehingga persamaan menjadi

$$w(x_i) = i + 2n - \frac{n-1}{2} - \frac{i}{2} + 2n - \frac{i-1}{2}$$

$$= i + \frac{3n+2-i}{2} + \frac{4n-i+1}{2}$$

$$= \frac{7n+3}{2}$$

Karena $w(x_i) = h$, maka itu harus merupakan bilangan bulat. Untuk membuat hasilnya berupa bilangan bulat maka n haruslah ganjil. Untuk i genap, suku yang kedua adalah pelabelan sisi untuk i ganjil dan suku ketika adalah pelabelan sisi untuk i genap. Sehingga persamaan menjadi

$$w(x_i) = i + 2n - \frac{i-1}{2} + 2n - \frac{n-1}{2} - \frac{i}{2}$$

$$= i + \frac{4n-i+2}{2} + \frac{3n+1-i}{2}$$

$$= \frac{7n+3}{2}$$

Karena $w(x_i) = h$, maka itu harus merupakan bilangan bulat. Untuk membuat hasilnya berupa bilangan bulat maka n haruslah ganjil.

($\leftarrow$) Menggunakan teorema 3.2 kita dapat mengetahui bahwa ketika sebuah graph $r - teratur$ dengan ordo n mempunyai sebuah PTSSA maka n dan r memiliki paritas yang berlawanan. Graph sikel C_n merupakan graph $2 - teratur$, artinya r genap, maka berdasarkan teorema 3.2 haruslah n ganjil. Sehingga kita menyimpulkan bahwa jika ada graph C_n di mana n genap maka disana tidak ada PTSSA.

Nilai dari konstanta ajaib pada graph $\boldsymbol{kG}$

Untuk k sebuah bilangan positif, pertama kita bentuk $h(kG)$, konstanta ajaib dari graph kG sebagai sebuah fungsi dari $h(G)$, yaitu konstanta ajaib dari graph G yang termasuk PTSSA.

Lemma 3.2 [Gómes, 2008]. *Ambil h(G) sebagai konstanta ajaib dari sebuah r-teratur graph G, dengan ordo n dan m sisi. Konstanta ajaib dari graph kG diberikan oleh*

$$h(kG) = kh(G) - \frac{(k-1)(r+1)}{2}$$

Bukti: Dari teorema 3.1 kita mempunyai

$$h(G) = 2m + \frac{m(m+1)}{n} + \frac{(n+1)}{2}$$

Sehingga,

$$h(kG) = 2km + \frac{km(km+1)}{kn} + \frac{kn+1}{2}$$

$$= 2km + \frac{m(km+1)}{n} + \frac{kn+1}{2}$$

$$= 2km + \frac{km^2+m}{n} + \frac{kn+1}{2}$$

$$= \frac{4kmn + 2km^2 + 2m + kn^2 + n}{2n}$$

$$= \frac{kn^2 + 2km^2 + 4kmn + k(n+2m) - k(n+2m) + n + 2m}{2n}$$

$$= \frac{k(n^2 + 2m^2 + 4mn + n + 2m) - (k-1)(n+2m)}{2n}$$

$$= k\left[\frac{(4mn + n^2 + n + 2m^2 + 2m)}{2n}\right] - \frac{(k-1)(n+2m)}{2n}$$

$$= k\left[\frac{(4mn + 2m(m+1) + n(n+1)}{2n}\right] - \frac{(k-1)(n+2m)}{2n}$$

$$= k\left[2m + \frac{m(m+1)}{n} + \frac{(n+1)}{2}\right] - \frac{(k-1)(n+2m)}{2n}$$

$$= k\big(h(G)\big) - (k-1)\frac{n+2m}{2n}$$

Karena G adalah $r - teratur$, maka $r = \frac{2m}{n} \Leftrightarrow nr = 2m$, sehingga diperoleh,

$$h(kG) = k\big(h(G)\big) - (k-1)\frac{n+nr}{2n}$$

$$= k\big(h(G)\big) - (k-1)\frac{n(r+1)}{2n}$$

$$= k\big(h(G)\big) - (k-1)\frac{(r+1)}{2}$$

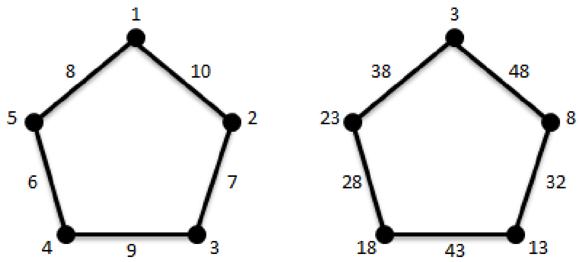
$$= k\big(h(G)\big) - \frac{(k-1)(r+1)}{2}$$

Persamaan 3.6 terbukti benar.

Pelabelan alami pada graph kG

Definisi 3.2 [Gómes, 2008]. Ambil G sebagai sebuah graph $r - teratur$ dengan ordo n, yang mana termasuk PTSSA, dengan pemetaan λ_G. Maka label alami dari kG adalah sebuah pemetaan injektif $\lambda_{kG}(V \cup E) = \{1, 2, \dots, i\}, i \in \mathbb{N}$ yang memenuhi

$$\lambda_{kG} = u \to k\gamma_{G(u)} - \frac{k-1}{2}$$



PTSSA PTSSA alami

Pelabelan netral pada graph kG

Didefinisikan $M(k) = \left\{\frac{-(k-1)}{2}, \frac{-(k-1)}{2} + 1, \dots, \frac{(k-1)}{2} - 1, \frac{(k-1)}{2}\right\}$ dengan $k \in \mathbb{Z}$

Definisi 3.3 [Gómes, 2008]. Ambil k sebagai bilangan bulat positif. Sebuah pelabelan netral dari G dengan unsur dari $M(k)$ adalah pemetaan Λ yang memenuhi

$$\Lambda : V \cup E \to M(k)$$

Untuk masing-masing $v_i \in V$

$$w_\Lambda(v_i) = 0$$

di mana $w_\Lambda(v_i)$ adalah bobot pemetaan Λ pada simpul v_i.

Proposisi 3.1 [Gómes, 2008]. *Ambil G sebagai sebuah graph teratur dengan derajat genap r. Di sana tidak ada pelabelan netral dari G dengan unsur dari $M(k)$ untuk k genap.*

Bukti: Karena $r + 1$ ganjil, ketika k genap, untuk

$$M(k) = \left\{\frac{-k}{2} + \frac{1}{2}, \frac{-k}{2} + \frac{3}{2}, \dots, \frac{k}{2} - \frac{3}{2}, \frac{k}{2} + \frac{-1}{2}\right\}$$

maka jumlah semua elemen $M(k)$ dengan banyak ganjil tidak ada yang sama dengan nol untuk suatu k bilangan genap. Oleh karena itu kita punya bahwa disana tidak ada pelabelan netral dari G dengan unsur $M(k)$ untuk k genap. Sehingga jelas bahwa tidak ada pelabelan netral pada $r - teratur$ dengan r genap dan k genap.

Definisi 3.4 [Gómes, 2008]. Dua label netral dari $G = (V, E)$, Λ_1 dan Λ_2 adalah *compactible* jika hanya jika $\Lambda_1(v_i) \neq \Lambda_2(v_i)$ untuk masing-masing $v_i \in V$ dan $\Lambda_1(v_i v_j) \neq \Lambda_2(v_i v_j)$ untuk masing-masing $v_i v_j \in E$.

Definisi 3.5 [Gómes, 2008]. Sebuah himpunan dari $q \leq k$ label netral dari G dengan anggota $M(k)$ adalah *compactible* jika dan hanya jika mereka merupakan pasangan yang *compactible*.

Teorema 3.4 [Gómes, 2008]. *Ambil k sebagai bilangan bulat positif dan ambil G sebagai graph $r - teratur$. Jika $\frac{(k-1)(r+1)}{2}$ adalah sebuah bilangan bulat, maka G mempunyai k label netral yang compactible dengan element dari $M(k)$.*

Bukti: Teorema *Vizing* mengatakan bahwa sebuah graph dapat diberikan pewarnaan sisi dengan Δ atau $\Delta + 1$ warna, di mana Δ adalah derajat maximum dari suatu graph. Sehingga pada kasus ini $r - teratur$ bias ditulis $\Delta - teratur$. Disamping itu, berdasarkan teorema *Vizing* untuk suatu graph G yang merupakan $\Delta - teratur$, disana ada sebuah partisi $S_1, S_2, \dots, S_{\Delta+1}$ dari $V(G) \cup E(G)$ sedemikian hingga setiap $v_i \in V(G)$ dan $j \in \{1, 2, \dots, \Delta + 1\}$ berlaku $v_i \in S_j$ dan tidak ada sisi yang terkait dengan v_i yang sesuai dengan S_j, atau $v_i \in S_j$ dan disana terdapat tepat satu sisi yang terkait dengan v_i yang sesuai dengan S_j.

Disini dibagi menjadi dua kasus

KASUS I

Ketika $\Delta + 1$ genap.

Pada kasus ini, kita kembali ke pelabelan $\Lambda_l, l = 1, 2, \dots, k$ didefinisikan oleh:

$$\Lambda_l(x) = l - \frac{k+1}{2}$$

$$untuk\ x \in S_j, j \equiv 1\ (mod\ 2)$$

$$\Lambda_l(x) = \frac{k+1}{2} - l$$

$$untuk\ x \in S_j, j \equiv 0\ (mod\ 2)$$

Itu dapat diperiksa bahwa $\{\Lambda_l(x) | l = 1, 2, \dots, k\} = M(k)$ untuk $j = 1, 2, \dots, \Delta + 1$. Bahkan, untuk masing-masing $v_i \in V$ dan untuk masing-masing $l = 1, 2, \dots, k$, $w_{\Lambda_l}(v_i) = 0$. Sehingga, k label $\Lambda_l(x)$ merupakan pelabelan netral yang *compactible* untuk setiap k bilangan bulat positif.

KASUS II

Ketika $\Delta + 1$ ganjil. Pada kasus ini k adalah bilangan ganjil, dan kita kembali ke pelabelan $\Lambda_l, l = 1, 2, \dots, k$ didefinisikan oleh:

$$\Lambda_l(x) = l - \frac{k+1}{2}\ untuk\ x \in S_j,$$

$$j \equiv 1\ (mod\ 2), j < \Delta$$

$$\Lambda_l(x) = \frac{k+1}{2} - l$$

$$untuk\ x \in S_j, j \equiv 0\ (mod\ 2), j < \Delta$$

$$\Lambda_l(x) = l - 1$$

$$untuk\ x \in S_\Delta, l \le \frac{(k+1)}{2}$$

$$\Lambda_l(x) = l - k - 1$$

$$untuk\ x \in S_\Delta, l > \frac{(k+1)}{2}$$

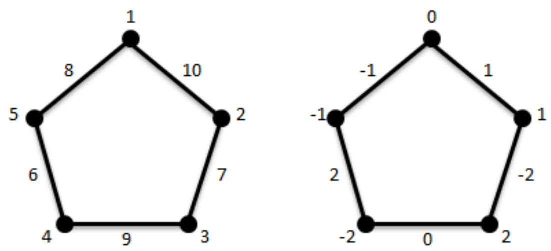
$$\Lambda_l(x) = \frac{k+3}{2} - 2l$$

$$untuk\ x \in S_{\Delta+1}, l \le \frac{(k+1)}{2}$$

$$\Lambda_l(x) = \frac{3k+3}{2} - 2l$$

$$untuk\ x \in S_{\Delta+1}, l > \frac{(k+1)}{2}$$

Seperti sebelumnya, jika $j < \Delta$ kita mempunyai $\{\Lambda_l(x) | l = 1, 2, \dots, k\} = M(k)$. Bahkan, jika $j = \Delta$ himpunan $\left\{\Lambda_l(x) \middle| l \le \frac{(k+1)}{2}\right\} = \{0, 1, \dots, \frac{-(k-1)}{2}\}$, sedangkan himpunan $\left\{\Lambda_l(x) \middle| l > \frac{(k+1)}{2}\right\} = \left\{\frac{-(k-1)}{2}, \frac{-(k-3)}{2}, \dots, -1\right\}$. Disamping itu, jika $j = \Delta$ kita mempunyai $\{\Lambda_l(x) | l = 1, 2, \dots, k\} = M(k)$. Terakhir, jika $j = \Delta + 1$ himpunan $\left\{\Lambda_l(x) \middle| l \le\right.$ $\left\{\frac{-(k-1)}{2}, \frac{-}{}\right.$, sedangkan himpunan $\left\{\Lambda_l(x) \middle| l > \frac{(k+1)}{2}\right\} = \left\{\frac{-(k-3)}{2}, \frac{-(k-7)}{2}, \dots, \frac{(k-3)}{2}\right\}$. Disamping itu, jika $j = \Delta + 1$ kita mempunyai $\{\Lambda_l(x) | l = 1, 2, \dots, k\} = M(k)$. Bahkan untuk masing-masing $v_i \in V$ dan untuk



PTSSA PTSSA netral

masing-masing $l = 1, 2, \dots, k, w_{\Lambda_l}(v_i) = 0$. Sehingga, k label $\Lambda_l(x)$ merupakan pelabelan netral yang *compactible* untuk setiap k bilangan bulat positif. Jadi terlihat jelas bahwa ada k label yang *compactible.*

Teorema 3.5 [Gómes, 2008]. *Ambil k sebagai sebuah bilangan bulat positif. Jika graph G adalah graph $r -$ teratur yang memiliki sebuah PTSSA dan $\frac{(k-1)(r+1)}{2}$ adalah sebuah bilangan bulat, maka graph kG mempunyai sebuah PTSSA.*

Bukti: Berdasarkan teorema 3.3, kG termasuk pelabelan netral. Ambil λ_{kG} dan $\Lambda_c, c = 1, 2, \dots, k$ sebagai label alami dari kG dan k label netral yang *compactible* dari G. Kita definisikan pemetaan γ_{kG} sebagai

$$\gamma_{kG}: V(kG) \cup E(kG) \rightarrow \{1, 2, \dots, kn, kn + 1, \dots, k(n+m)\}$$

Sedemikian hingga,

$$\gamma_{kG}(c, v_i) = \lambda_{kG}(v_i) + \Lambda_c(v_i)$$

$$\gamma_{kG}(c, v_i v_j) = \lambda_{kG}(v_i, v_j) + \Lambda_c(v_i, v_j)$$

Sehingga

$$w_{\gamma_{kG}}(c, v_i) = \gamma_{kG}(c, v_i) + \sum_{(c,v_j)\in N(c,v_i)} \gamma_{kG}(c, (v_i, v_j))$$

$$= k\gamma_G(v_i) + \Lambda_{kG}(c, v_i) - \frac{(k-1)(\Delta+1)}{2} + \sum_{(c,v_j)\in N(c,v_i)} k\gamma_{kG} + \sum_{(c,v_j)\in N(c,v_i)} \Lambda_{kG}\left(c, (v_i, v_j)\right)$$

$$= kh(G) - \frac{(k-1)(\Delta+1)}{2}$$

Yang mana sesuai dengan lemma 3.1. Jadi terbukti bahwa kG mempunyai sebuah

■

PTSSA.

Akibat 3.3 *Ambil n dan k sebagai dua bilangan bulat positif. Jika n dan k merupakan bilangan ganjil, maka graph kC_n mempunyai PTSSA.*

Bukti: Karena n merupakan bilangan ganjil, berdasarkan teorema 3.3 graph C_n memiliki PTSSA. Kemudian ketika k merupakan bilangan ganjil, $\frac{(k-1)(r+1)}{2}$ merupakan bilangan bulat. Sehingga, berdasarkan teorema 3.5, graph kC_n memiliki PTSSA jika n dan k merupakan bilangan ganjil.

Metode Pelabelan Total Super Simpul Ajaib

1. Ambil sebuah graph C_n lengkap dengan PTSSAnya.

Berdasarkan teorema 3.3, graph C_n yang memiliki PTSSA hanyalah graph C_n yang berordo ganjil. Maka, disini sebagai contoh diambil graph C_5 berikut lengkap dengan label total super simpul ajaibnya.

2. Tentukan nilai h berdasarkan teorema 3.1.

Karena disini yang digunakan adalah graph C_5, maka nilai dari $n = m = 5$. Sehingga diperoleh $h = 2m + \frac{m(m+1)}{n} + \frac{(n+1)}{2} = 2 \cdot 5 + \frac{5(5+1)}{5} + \frac{(5+1)}{2} = 10 + \frac{5\cdot 6}{5} + \frac{6}{2} = 10 + 6 + 3 = 19.$

3. Tentukan nilai k, kemudian hitung kemungkinan nilai $h(kC_n)$.

Sesuai teorema 3.4 dan 3.5, nilai k harus memenuhi $\frac{(k-1)(r+1)}{2} \in \mathbb{Z}$, dan sesuai

Penyelidikan 2 nilai k ganjil. Disini dipilih $k = 5$.

Selanjutnya menentukan nilai $h(kC_n)$ berdasarkan lemma 3.1.

$$h(kC_n) = kh(G) - \frac{(k-1)(r+1)}{2}$$

dan karena disini yang digunakan adalah graph C_5 maka berdasarkan Penyelidikan 1 diperoleh $h(kC_n) = kh(C_n) - \frac{3(k-1)}{2} = 5 \cdot 19 - \frac{3(5-1)}{2} = 95 - \frac{3 \cdot 4}{2} = 95 - 6 = 89$.

Sehingga kemungkinan nilai bilangan ajaib untuk masing-masing graph C_5 pada $5C_5$ nanti adalah 89.

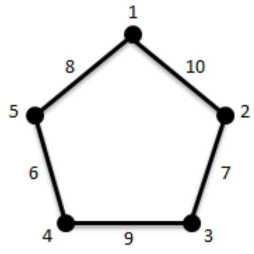
4. Ubah PTSSA pada C_n ke dalam label alami.

Awalnya kita memiliki sebuah PTSSA pada C_5. Dari sana kita ubah labelnya menjadi label alami dengan berdasarkan definisi 3.2. Label ini digunakan untuk gambaran secara umum dari bilangan-bilangan asli yang nantinya digunakan pada PTSSA pada kC_n.

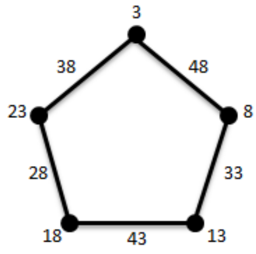
$$u = k\gamma_G(u) - \frac{k-1}{2}$$

$$u_1 = 5 \cdot 1 - \frac{5-1}{2} = 5 - 2 = 3$$
$$u_2 = 5 \cdot 2 - \frac{5-1}{2} = 10 - 2 = 8$$
$$u_3 = 5 \cdot 3 - \frac{5-1}{2} = 15 - 2 = 13$$
$$u_4 = 5 \cdot 4 - \frac{5-1}{2} = 20 - 2 = 18$$
$$u_5 = 5 \cdot 5 - \frac{5-1}{2} = 25 - 2 = 23$$
$$u_6 = 5 \cdot 6 - \frac{5-1}{2} = 30 - 2 = 28$$
$$u_7 = 5 \cdot 7 - \frac{5-1}{2} = 35 - 2 = 33$$
$$u_8 = 5 \cdot 8 - \frac{5-1}{2} = 40 - 2 = 38$$
$$u_9 = 5 \cdot 9 - \frac{5-1}{2} = 45 - 2 = 43$$
$$u_{10} = 5 \cdot 10 - \frac{5-1}{2} = 50 - 2 = 48$$

sehingga diperoleh,



PTSSA



PTSSA alami

5. Bentuk himpunan $M(k)$.

$M(k) = \left\{\frac{-(k-1)}{2}, \frac{-(k-1)}{2} + 1, \dots, \frac{(k-1)}{2} - 1, \frac{(k-1)}{2}\right\}$ dengan $k \in \mathbb{Z}$

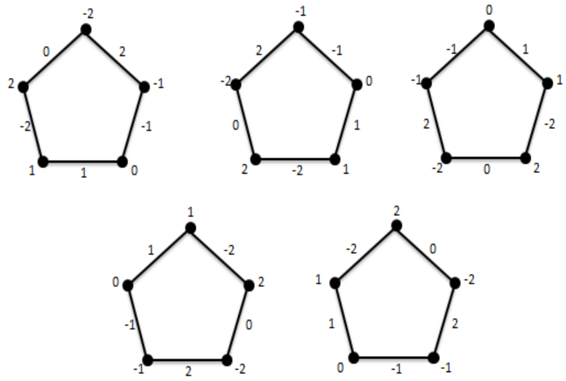
Karena $k = 5$, maka himpunan $M(k)$ diperoleh,

$$M(k) = \left\{\frac{-(5-1)}{2}, \frac{-(5-1)}{2} + 1, \dots, \frac{(5-1)}{2} - 1, \frac{(5-1)}{2}\right\}$$

$$M(k) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

6. Gambar graph C_n sebanyak k dan beri label netral pada masing-masing graph C_n, berdasarkan anggota $M(k)$ yang sudah terbentuk, sehingga terbentuk label netral pada C_n yang *compactible* sebanyak k.

Sesuai definisi 3.4 dan 3.5, disini ada 5 label netral yang *compactible*. Dan berdasarkan definisi 3.3 5 label netral yang compactibel yang terbentuk adalah sebagai berikut,



7. Ubah label pada kC_n dengan bilangan asli menurut aturan $\gamma_{kG}(c, v_i) = \lambda_{kG}(v_i) + \Lambda_c(v_i)$ dan $\gamma_{kG}(c, v_i v_j) = \lambda_{kG}(v_i, v_j) + \Lambda_c(v_i, v_j)$. Sehingga untuk masing-masing graph sikel dari k, di mana k dihitung dari kiri atas hingga kanan bawah akan berubah menjadi seperti berikut:

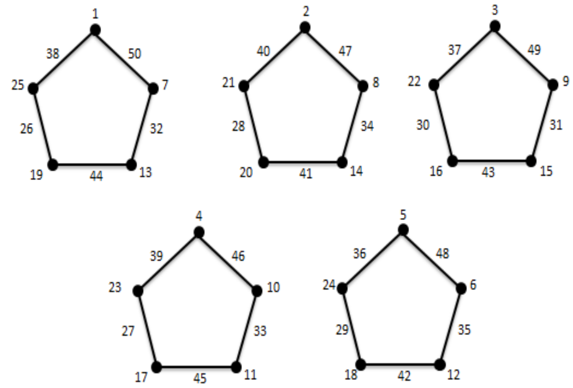
Untuk $k = 1$, label pada simpul-simpulnya adalah $3 + (-2) = 1;\ 8 + (-1) = 7;\ 13 + 0 = 13;\ 18 + 1 = 19;\ 23 + 2 = 25$.Untuk label sisinya adalah $48 + 2 = 50; 33 + (-1) = 32; 43 + 1 = 44; 28 + (-2) = 26; 38 + 0 = 38$.

Untuk $k = 2$, label pada simpul-simpulnya adalah $3 + (-1) = 2;\ 8 + 0 = 8;\ 13 + 1 = 14;\ 18 + 2 = 20;\ 23 + (-2) = 21$. Sedang untuk label sisinya adalah $48 + (-1) = 47; 33 + 1 = 34; 43 + (-2) = 41; 28 + 0 = 28; 38 + 2 = 40$.

Untuk $k = 3$, label pada simpul-simpulnya adalah $3 + 0 = 3;\ 8 + 1 = 9;\ 13 + 2 = 15;\ 18 + (-2) = 16;\ 23 + (-1) = 22$. Sedang untuk label sisinya adalah $48 + 1 = 49; 33 + (-2) = 31; 43 + 0 = 43; 28 + 2 = 30; 38 + (-1) = 37$.

Untuk $k = 4$, label pada simpul-simpulnya adalah $3 + 1 = 4;\ 8 + 2 = 10;\ 13 + (-2) = 11;\ 18 + (-1) = 17;\ 23 + 0 = 23$. Sedang untuk label sisinya adalah $48 + (-2) = 46; 33 + 0 = 33; 43 + 2 = 45; 28 + (-1) = 27; 38 + 1 = 39$.

Untuk $k = 5$, label pada simpul-simpulnya adalah $3 + 2 = 5;\ 8 + (-2) = 6;\ 13 + (-1) = 12;\ 18 + 0 = 18;\ 23 + 1 = 24$. Sedang untuk label sisinya adalah $48 + 0 = 48; 33 + 2 = 35; 43 + (-1) = 42; 28 + 1 = 29; 38 + (-2) = 36$.



8. PTSSA pada kC_n sudah terbentuk dengan nilai h sesuai dengan perkiraan pada langkah ke 2.

Gambar di atas merupakan graph $5C_5$ dengan PTSSAnya. Terlihat untuk bilangan ajaibnya adalah 89 sesuai dengan bilangan ajaib yang kita peroleh menggunakan lemma 3.1 pada langkah ke 2.

GRAPH YANG TIDAK MEMILIKI PTSSA

1. **Graph yang memiliki simpul berderajat satu**

   Teorema 3.6 [Super Vertex-magic Total Labelings of Graph, 2004]. *Jika G mempunyai sebuah simpul berderajat satu, maka G tidak mempunyai pelabelan super simpul ajaib.*

Bukti: Ambil G sebagai graph dengan ordo $v \geq 3$ dan v_0 sebagai sebuah simpul berderajat satu di G. Maka v_0 mempunyai sebuah tetangga yang unik yaitu v_1 dengan $\delta > 1$. Ambil $e_0, e_1, \dots, e_{\delta-1}$ sebagai sisi yang terkait dengan v_1 di mana $e_0 = v_1 v_0$. Anggap G mempunyai sebuah PTSSA, maka

$$h = \gamma(v_0) + \gamma(e_0)$$

$$= \gamma(v_1) + \gamma(e_0) + \gamma(e_1) + \cdots + \gamma(e_{\delta-1})$$

sehingga, $\gamma(v_0) - \gamma(v_1) = \gamma(e_1) + \gamma(e_2) + \cdots + \gamma(e_{\delta-1})$. Karena γ adalah PTSSA, semua bentuk di ruas kanan harus lebih besar dari v dengan kata lain bentuk di sisi kiri kurang dari v. Jelas terjadi kontradiksi, sehingga seharusnya G tidak memiliki PTSSA.

2. Graph Lintasan P_n

Teorema 3.7 [E-Super Vertex Magic Labeling and V-Super Vertex Magic Labeling, 2014]. *Tidak ada graph lintasan P_n yang memiliki PTSSA.*

Bukti: Ambil $n \geq 3$ berupa bilangan bulat ganjil, himpunan sisi, dan himpunan simpul dari P_n yang diberikan oleh

$$V(P_n) = \{1, 2, \dots, n\}$$

dan

$$E(P_n) = \{n+1, n+2, \dots, 2n\}$$

Definisikan $\gamma: V \cup E \rightarrow \{1, 2, .., 2N-1\}$ sebagai berikut,

$\gamma(v_i) = 1,$

$\gamma(v_i) = n - 1 + 2,$ untuk $2 \leq i \leq n,$

$$\gamma(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} \dfrac{3n+i}{2} & jika\ i\ ganjil \\ \dfrac{2n+i}{2} & jika\ i\ genap \end{cases}$$

Berdasarkan lemma 3.1, kita tidak menemukan bilangan ajaibnya, sehingga P_n tidak mempunyai PTSSA.

3. Graph Roda W_n

Teorema 3.8 [Super Vertex-magic Total Labelings of Graph, 2004]. *Tidak ada graph roda yang mempunyai PTSSA.*

Bukti: Anggap W_n dengan $n > 2$ mempunyai sebuah PTSSA. Maka $v = n + 1$ dan $e = 2n$, sehingga

$$h = \frac{(v+e)(v+e+1)}{v} - \frac{v+1}{2}$$

$$= \frac{(3n+1)(3n+2)}{n+1} - \frac{n+2}{2}$$

$$= \frac{17n^2 + 15n + 16}{2n+2}$$

$$= \frac{\left(\left(\frac{17}{2}n + 1\right)(2n+2)\right) + 14}{2n+2}$$

Karena untuk $n > 2$, $2n + 2$ tidak selalu habis membagi 14 mengakibatkan h bukan berupa anggota bilangan bulat.

Sehingga tidak ada graph roda yang dapat mempunyai sebuah PTSSA. ■

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut:

Pelabelan total super simpul ajaib adalah bentuk khusus dari pelabelan total simpul ajaib dengan penambahan sifat label-label terkecilnya terletak pada simpul-simpulnya. Kemudian nilai bilangan ajaib dari pelabelan total super simpul ajaib adalah $h = 2m + \frac{m(m+1)}{n} + \frac{(n+1)}{2}$. Selain itu tidak semua graph memiliki pelabelan total super simpul ajaib. Ada beberapa syarat yang harus dipenuhi sehingga darinya bisa dibentuk pelabelan total super simpul ajaib. Syarat-syarat itu diantaranya adalah banyaknya sisi paling sedikit adalah $\frac{2n}{3}$, batasan nilai bilangan ajaibnya adalah $h \geq \frac{41n+21}{18}$, untuk n banyak simpul dan m banyak sisi, maka harus memenuhi $n|m(m+1)$ untuk n ganjil, dan $n|2m(m+1)$ untuk n genap.

Sedang untuk graph-graph khusus yang memiliki pelabelan total super simpul ajaib antara lain adalah graph teratur dengan syarat n dan r mempunyai peritas yang berbeda dan jika $n \equiv 0 \, mod \, 8$ maka $\equiv 0 \, mod \, 4$, jika $n \equiv 4 \, mod \, 8$ maka $m \equiv 2 \, mod \, 4$. Kemudian graph sikel dengan syarat memiliki ordo ganjil.

Berikutnya ketika sebuah graph G memiliki pelabelan total super simpul ajaib, belum tentu ia memiliki pelabelan total super simpul ajaib untuk kG. Begitu juga sebaliknya. Misalnya pada graph sikel C_n, kC_n akan memiliki pelabelan total super simpul ajaib jika dan hanya jika n dan k merupakan bilangan ganjil.

Selanjutnya, untuk dasar-dasar dari metode penyusunan pelabelan total super simpul ajaib, terlihat bahwa semuanya berawal dari graph teratur dan graph yang memiliki pelabelan total super simpul ajaib. Jadi untuk graph diluar itu, metode ini tidak bisa diterapkan. Adapun metode untuk pelabelan total super simpul ajaib adalah sebagai berikut:

1. Ambil sebuah graph C_n lengkap dengan pelabelan total super simpul ajaibnya.
2. Tentukan nilai h berdasarkan teorema 3.1.
3. Tentukan nilai k, kemudian hitung kemungkinan nilai $h(kC_n)$.
4. Ubah pelabelan total super simpul ajaib pada C_n ke dalam label alami.
5. Bentuk himpunan $M(k)$.
6. Gambar graph C_n sebanyak k dan beri label netral pada masing-masing graph C_n, berdasarkan anggota $M(k)$ yang sudah terbentuk, sehingga terbentuk label netral pada C_n yang *compactible* sebanyak k.
7. Ubah label pada kC_n dengan bilangan asli dengan aturan $\gamma_{kG}(c, v_i) = \lambda_{kG}(v_i) + \Lambda_c(v_i)$ dan $\gamma_{kG}(c, v_i v_j) = \lambda_{kG}(v_i, v_j) + \Lambda_c(v_i, v_j)$.
8. Pelabelan total super simpul ajaib pada kC_n sudah terbentuk dengan nilai h sesuai dengan perkiraan pada langkah ke 2.

Dan adapun graph yang tidak memiliki pelabelan total super simpul ajaib antara lain adalah graph yang memiliki simpul berderajat 1, graph lintasan P_n, dan graph roda W_n.

SARAN

Untuk penelitian selanjutnya disarankan membahas tentang metode pelabelan pada graph selain pelabelan total, misalnya pelabelan *graceful*, *Harmonious*, *prime*, *vertex prime*, dan masih banyak lagi. Selain itu graph yang diteliti adalah graph yang masih jarang digunakan seperti graph bintang,graph kubik, graph Petersen, graph bipartite, dan lain-lain.

Dafar Pustaka

Agus, Nuniek. A. 2008. “Mudah Belajar Matematika 2”. Jakarta: Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan Nasional.

Airha. 2012. “Studi Kepustakaan”. http://phairha.blogspot.com diakses tanggal 13 Januari 2014.

Vasudev, C. 2006. “Graph Theory With Application”. New Delhi: New Age International.

Gómes, J. 2007. “Two new methods to obtain super vertex-magic total labelings of graphs”. Spanyol: Universitat Politècnica de Catalunya.

Gupta, M.K. 2009. “Discrete Mathematics”. India: Krishna Prakashan Media (P) Ltd., Meerut.

Harris, John M. 2008. “Combinatorics and Graph Theory”. New York: Springer.

MacDougall, J. A, Miller, Sugeng. 2004. “ Super Vertex-magic Total Labelings of Graph”. Newcastle: Proc. 15th Australasian Workshop on Combinatorial Algorithms.

Gallian, J. A. 2005. “A dynamic survey of graph labeling”. Duluth: Department of Mathematics and Statistics University of Minnesota Duluth.

Kumari, N. 2013. “ E-Super Vertex Magic Labeling and V-Super Vertex Magic Labeling”. India: International Journal of Scientific & Engineering Research

Jonathan, L dan Gross, Y. Z. 2003. “Hand Book Of Graph Theory”. Florida: CRC Press.

Marr, Alison M dan Wallis. 2013. “Magic Graph”. New York: Springer.

Nuharini, *D*. 2008. “Matematika Konsep dan Aplikasinya”. Jakarta: Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan Nasional.

Ribhan Y. P. 2005. “Super Vertex-magic Total Labeling on Cycles and Complete Graphs”. Skripsi S-1 Program Studi Matematika, Universitas Indonesia.

Samatova, N. F. 2004. “Practical Graph Mining”. Florida: CRC Press.

Suryadi, D. 2002. “Pengantar Teori Graph”. Jakarta: Universitas Terbuka.

Wallis, W. D. 2007. “A Beginner’s Guide to Graph Theory”. Carbondale: Birkhauser Boston.

Wibowo, F. W. 2013. “Matematika Diskret (Graph I)”. www.elearning.amikom.ac.id diakses tanggal 13 Januari 2014.

Zed, Mestika. 2008. “Metode Penelitian Kepustakaan”. Jakarta: Yayasan Obor Indonesia.