PEMBENTUKAN MATRIKS KANONIK JORDAN DENGAN MENGGUNAKAN VEKTOR-VEKTOR EIGEN DIPERUMUM

Darlena
Mahasiswa Universitas Muhammadiyah Ponorogo

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui cara pembentukan matriks bentuk Kanaonik Jordan. Penelitian ini manggunakan vektor-vektor eigen diperumum dan sifat-sifat matriks Kanonik Jordan untuk membentuk matriks Kanonik Jordan. Penelitian ini menggunakan Metode penelitian kepustakaan atau riset kepustakaan (*library research*). Dalam penelitian ini diketahui bahwa tidak semua matriks persegi dapat didiagonalisasikan, sehingga tidak semua matriks persegi dapat ditemukan bentuk Kanonik Jordannya. Oleh karena itu, dilakukan proses diagonalisasi dengan bantuan vektor-vektor eigen diperumum yang kemudian untuk membentuk matriks Kanonik Jordan. Dari hasil penelitian kali ini menunjukan bahwa vektor-vektor eigen diperumum dapat digunakan untuk menemukan vektor-vektor basis ruang eigen dimana banyaknya basis ini disamakan dengan banyaknya multilisitas aljabar nilai eigen. Dengan demikian, diagonalisasi untuk pembentukan matriks Kanonik Jordan dapat dilakukan. Kemudian, hasil analisis selanjutnya yaitu tentang sifat bentuk Kanonik Jordan. Sifat-sifat ini ternyata juga dapat digunakan untuk membentuk matriks Kanonik Jordan. Adapun hasil analisis sifat-sifat tersebut antara lain, multiplisitas aljabar nilai eigen menunjukan jumlah nilai eigen tersebut pada diagonal utama matriks Kanonik Jordan, multiplisistas geometri menunjukan jumlah blok Jordan yang terbentuk dari nilai eigen tersebut. Sedangkan ukuran dari masing-masing blok Jordan dapat diketahui mengunakan indeks nilai eigen. Bentuk Kanonik Jordan yang dihasilkan dari kedua cara ini adalah sama.

Kata kunci : Vektor-vektor Eigen Diperumum, Rantai Vektor-vektor Eigen Diperumum, Matriks Blok Jordan, Matriks Kanonik Jordan

PENDAHULUAN

Salah satu bidang kajian matematika adalah ajabar linear di mana salah satu cabangnya adalah matriks. Matriks adalah suatu kumpulan angka-angka (sering disebut elemen) yang disusun menurut baris dan kolom sehingga berbentuk persegi panjang di mana panjang dan lebarnya ditunjukan oleh banyaknya kolom dan baris.

Pada matriks kita mengenal diagonalisasi matriks yaitu proses pembentukan suatu matriks menjadi matriks diagonal dengan melibatkan nilai eigen dan vektor eigen. Sebuah matriks bujursangkar A dikatakan dapat di diagonalisasi (*diagonalizable*) jika terdapat sebuah matriks *nonsingular* P sedemikian rupa sehingga $P^{-1}AP$ adalah sebuah matriks diagonal; matriks P dikatakan mendiagonalisasi (*diagonalize*) A (Anton dan Rorres, 2000).

Untuk membentuk matriks *nonsingular* P diperlukan nilai eigen dari matriks bujursangkar A yang memiliki multiplisitas aljabar dan multiplisitas geometri (dimensi ruang eigen) yang sama tetapi tidak semua matriks bujursangkar memilki nilai eigen seperti demikian. Oleh karena itu, tidak semua matriks bujursangkar dapat didiagonalisasikan. Proses diagonalisasi digunakan salah satunya pada konsep keserupaan (similaritas) dua matriks.

Dua matriks bujursangkar A dan B dikatakan serupa jika ada matriks *nonsigular* P dengan $A = P^{-1}BP$ dimana P^{-1} adalah invers matriks *nonsigular* P. Dua matriks yang mirip memiliki banyak sifat yang sama yang disebut dengan sifat Invarian-invarian

Keserupaan meliputi Determinan, Keterbalikan (Invers), Rank, Nulitas, Trace, Polinomial karakteristik, Nilai Eigen, dan Dimensi ruang eigen.

Konsep similaritas matriks banyak digunakan pada pembahasan aljabar linear tingkat lanjut diantaranya yaitu pada matrik-matriks dengan sifat khusus, fungsi matriks, bentuk kuadrat, dan masih banyak lainnya. Dalam penulisan kali ini yang akan dibahas adalah matriks-matriks dengan sifat khusus, yaitu matriks Bentuk Kanonik Jordan.

Bentuk Kanonik Jordan adalah bentuk khusus dari suatu matriks yang memiliki bentuk sederhana seperti berikut ini

$$J = \begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & J_{k_2}(\lambda_2) & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & J_{k_m}(\lambda_m) \end{bmatrix}$$

dengan $J_{k_i}(\lambda_i)$ adalah matriks blok jordan pada diagonal utama dan $\boldsymbol{0}$ adalah matriks nol. Matriks blok jordan $J_{k_i}(\lambda_i)$ berbentuk

$$J_k(\lambda_o) = \begin{bmatrix} \lambda_o & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_o & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_o & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_o & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_o \end{bmatrix}$$

Elemen diagonal utama matriks ini merupakan nilai eigen dari matriks asalnya. Akibatnya, elemen diagonal utama dari matriks kanonik jordan juga nilai eigen dari matriks asalnya.

Matriks Kanonik Jordan dibentuk melalui proses diagonalisasi matriks asalnya. Oleh karena tidak semua matriks bujursangkar dapat didiagonalisasikan maka tidak semua matriks bujursangkar dapat ditemukan bentuk Kanonik Jordannya. Matriks Bentuk Kanonik Jordan dinotasikan dengan J sehingga bentuk Kanonik Jordan dari matriks A adalah $P^{-1}AP = J$. Berdasarkan definisi keserupaan, maka matriks Kanonik Jordan serupa dengan matriks asalnya.

Jika bentuk Kanonik Jordan dari suatu matriks telah diketahui maka informasi aljabar linear tentang matriks asalnya mudah diketahui diantaranya untuk menentukan invers matriks diperumum (untuk matriks singular). Selain itu, dalam kehidupan sehari-hari, bentuk Kanonik Jordan juga dapat diaplikasikan untuk menghitung matriks eksponensial yang biasanya digunakan pada pertanian untuk menentukan pertumbuhan suatu tanaman, pada bidang fisika untuk peluruhan radio aktif dan pada bidang ekonomi untuk menentukan pertumbuhan dana simpanan majemuk dengan bunga kontinyu. Matriks eksponensial dari matriks A dinotasikan dengan e^A. Matriks eksponensial dari matriks A dapat dihitung dengan rumus $Pe^J P^{-1}$ dengan J adalah matriks Kanonik Jordan dari A dan P adalah matriks *nonsingular*. Jadi, pembentukan matriks Kanonik Jordan sangat perlu untuk dilakukan.

Oleh karena itu, penelitian ini akan membahas tentang Pembentukan Matriks Kanonik Jordan Dengan Menggunakan Vektor-vektor Eigen Diperumum.

RUMUSAN MASALAH

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah diuraikan di atas, maka dapat ditentukan rumusan masalah penelitian yaitu : bagaimana membentuk matriks Kanonik Jordan dari suatu matriks. Untuk memperjelas perumusan masalah di atas, maka dirumuskan pertanyaan penelitian di atas, maka dirumuskan pertanyaan penelitian sebagai berikut:

1. Apakah yang dimaksud dengan vektor-vektor eigen diperumum dan bagaimana cara pembentukan vektor-vektor eigen diperumum?
2. Apakah yang dimaksud dengan matriks Kanonik Jordan dan sifat-sifatnya?
3. Bagaimana cara membentuk matriks Kanonik Jordan dari suatu matriks dengan menggunakan vektor-vektor eigen diperumum?

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penulisan ini adalah penelitian kepustakaan atau riset kepustakaan (*library research*). Riset kepustakaan atau sering juga disebut studi pustaka ialah serangkaian kegiatan yang berkenaan dengan metode pengumpulan data pustaka, membaca dan mencatat serta mengolah bahan penelitian. (Zed, 2008: 3). Sedangkan menurut M. Nazir dalam bukunya yang berjudul 'Metode Penelitian' mengemukakan bahwa yang dimaksud dengan Studi kepustakaan adalah teknik pengumpulan data dengan mengadakan studi penelaahan terhadap buku-buku, literatur-literatur, catatan-catatan, dan laporan-laporan yang ada hubungannya dengan masalah yang dipecahkan.

Data yang diperlukan dalam penelitian ini adalah data yang bersifat tekstual meliputi ruang vektor, nilai eigen, vektor eigen dan matriks bentuk Kanonik Jordan (matriks Jordan). Informasi untuk penelitian ini dikumpulkan dari buku-buku acuan mengenai dasar-dasar aljabar linear, aplikasi aljabar linear, analisis matriks, jurnal-jurnal dan artikel di internet mengenai vektor-vektor eigen diperumum dan bentuk kanonik Jordan. Buku acuan utama yang digunakan adalah Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi Jilid 1 (2005) dan Elementary Linear Algebra Applications version (1973) untuk ruang vektor, kombinasi linier, membangun linier, kebebasan linier, basis dan dimensi, ruang baris, ruang kolom, dan ruang null, rank dan nulitas, nilai eigen dan vektor eigen, diagonalisasi, multiplisitas aljabar, multiplisitas geometri dan keserupaan. Hand Book Of linear algebra (2007) untuk vektor-vektor eigen diperumum dan matriks Kanonik Jordan.

Pengumpulan data merupakan salah satu proses pengadaan data untuk keperluan penelitian. Pengumpulan data adalah prosedur yang sistematis dan standar untuk memperoleh data yang diperlukan. Untuk memperoleh data, penulis menggunakan langkah-langkah *Library Research* yaitu setiap penelitian memerlukan bahan yang bersumber dari perpustakaan. Penulis menggunakan metode dokumenter, yaitu mencari data mengenai hal-hal atau variabel yang berupa catatan, buku-buku, jurnal penelitian yang relevan dengan permasalahan yang penulis bahas.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan penulis dalam menganalisis data adalah sebagai berikut: menentukan vektor-vektor eigen diperumum dari suatu matriks dengan nilai eigen taknol, menemukan sifat-sifat matriks Kanonik Jordan dari suatu matriks nonsingular, dan Menentukan matriks Kanonik Jordan dari suatu matriks *nonsingular* dengan menggunakan vektor-vektor eigen diperumum

HASIL PEELITIAN

Setelah melakukan serangkaian penelitian terhadap beberapa referensi, penelitian ini menemukan bahwa untuk mendiagonalisasikan suatu matriks maka matriks tersebut harus mempunyai multiplisitas aljabar $\alpha(\lambda)$ yang sama dengan multiplitas geometrinya $\gamma(\lambda)$. Jika suatu matriks memiliki multiplisitas geometri yang kurang dari multiplisitas aljabarnya maka perlu dicari vektor eigen diperumum dari matriks tersebut sehingga membuat dimensi ruang eigen atau multiplisitas geometrinya sama dengan multiplitas aljabarnya dan barulah matriks tersebut dapat didiagonalisasikan.

Definisi. Jika A matriks berordo $n \times n$, vektor-vektor eigen diperumum dari A bersesuaian dengan nilai eigen λ adalah vektor tak nol yang memenuhi

$$(A - \lambda I)^p\mathbf{x}_p = \mathbf{0} \qquad (1)$$

Untuk beberapa bilangan positif p. Dengan kata lain, itu adalah sebuah elemen tak nol dari ruang null $(A - \lambda I)^p$.

Rantai vektor-vektor eigen diperumum adalah rantai yang dibentuk oleh vektor-vektor eigen diperumum. Panjang rantai ini diukur dari jumlah vektor-vektor eigen yang membentuknya.

Misal A adalah matriks berordo $n \times n$ dan $\mathbf{x}$ adalah sebuah vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ. Berdasarkan definisi vektor eigen diperumum, maka

$$(A - \lambda I)^p\mathbf{x}_p = \mathbf{0}$$

untuk sebuah bilangan bulat positif p. Jika $0 \leq q < p$, maka

$$(A - \lambda I)^{p-q}(A - \lambda I)^q\mathbf{x}_p = \mathbf{0}$$

Berdasarkan bentuk (1), berarti $(A - \lambda I)^q\mathbf{x}_p$ juga merupakan vektor eigen diperumum yang bersesuaian dengan λ untuk $q = 0,1,\dots,p-1$.

Jika kita uraikan adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}(A - \lambda I)^p\mathbf{x}_p &= \mathbf{0}\\ (A - \lambda I)^{p-1}\mathbf{x}_{p-1} &= \mathbf{0}\\ &\vdots\\ (A - \lambda I)^3\mathbf{x}_3 &= \mathbf{0} \qquad (2)\\ (A - \lambda I)^2\mathbf{x}_2 &= \mathbf{0}\\ (A - \lambda I)\mathbf{x}_1 &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Di mana $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_{p-1}, \mathbf{x}_p$ adalah vektor-vektor eigen diperumum yang berasal dari ruang eigen yang berbeda-beda. Jika bentuk (2) ditulis ulang maka akan diperoleh bentuk sebagai berikut

$$\begin{aligned}(A - \lambda I)^{p-1}\mathbf{x}_p &= \mathbf{x}_1\\ (A - \lambda I)^{p-2}\mathbf{x}_p &= \mathbf{x}_2\\ &\vdots \qquad (3)\\ (A - \lambda I)^2\mathbf{x}_p &= \mathbf{x}_{p-2}\\ (A - \lambda I)\mathbf{x}_p &= \mathbf{x}_{p-1}.\end{aligned}$$

Maka, diperoleh definisi berikut.

Definisi. Jika p adalah bilangan bulat terkecil sedemikian hingga $(A - \lambda I)^p\mathbf{x}_p = \mathbf{0}$, maka barisan

$$(A - \lambda I)^{p-1}\mathbf{x}_p, (A - \lambda I)^{p-2}\mathbf{x}_p, \dots, (A - \lambda I)\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_p \qquad (4)$$

disebut sebuah rantai atau lingkaran vektor-vektor eigen diperumum. Bilangan bulat p disebut lebar rantai atau lebar lingkaran.

Teorema. *Vektor-vektor eigen diperumum pada sebuah rantai vektor eigen diperumum adalah bebas linier.*

Setelah diperoleh sejumlah vektor eigen yang bebas linear dari suatu rantai vektor eigen diperumum, maka dapat dibentuk suatu matriks *non-singular* P dimana vektor-vektor kolom dari P adalah para vektor-vektor eigen diperumum yang bebas linier tersebut. Selanjutnya matriks P ini digunakan dalam proses mendiagonalisasi matriks A jika matriks A adalah sebuah matriks yang tidak dapat didiagonalisasi pada awalnya. Proses diagonalisasi ini adalah untuk membentuk matriks kanonik jordan dari matriks A.

Sebelum membentuk matriks Kanonik Jordan dari matriks A, maka akan dibahas terlebih dahulu tentang matriks Blok Jordan, Kanonik Jordan dan sifat-sifat matriks Kanonik Jordan.

Definisi [Matriks Blok Jordan]

Sebuah matriks Blok Jordan $J_k(\lambda_o)$ dengan nilai eigen λ_o adalah matriks persegi $k \times k$, dengan λ_o pada diagonal utamanya dan 1 sebagai elemen di atas diagonal utama dan elemen lainnya adalah nol. Jadi, matriks blok Jordan merupakan matriks segitiga atas berordo $k \times k$.

Bentuk matrika blok Jordan adalah sebagai berikut:

$$J_k(\lambda_o) = \begin{bmatrix} \lambda_o & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \lambda_o & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_o & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_o & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_o \end{bmatrix}$$

Berikut adalah contoh matriks blok Jordan

$$J_2(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ J_3(2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Teorema. *Misalkan $J_k(\lambda_o)$ adalah matriks blok Jordan berukuran $k \times k$ dengan nilai eigen λ_o. Maka karakteristik polinomialnya adalah $p_{J_k(\lambda_o)}(\lambda) = (-1)^k(\lambda - \lambda_o)^k$ dan polinomial terkecilnya adalah $m_{J_k(\lambda_o)}(\lambda) = (\lambda - \lambda_o)^k$.*

Sifat-sifat dari matriks Blog Jordan adalah sebagai berikut

1. Matriks blok Jordan hanya mempunyai satu nilai eigen $\lambda = \lambda_o$ dengan multiplisitas aljabar k
   $\det\big(J_k(\lambda_o)\big) =$
   $$\det \begin{bmatrix} \lambda - \lambda_o & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \lambda_o & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda - \lambda_o \end{bmatrix}$$
   $= (\lambda - \lambda_o)^k$
2. Mempunyai multiplisitas geometri 1, artinya setiap blog jordan hanya bersesuaian dengan satu vektor eigen yang bebas linier.
   $$\text{Ruang Null dari } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
   $$\text{dibangun oleh } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
3. Dinotasikan
   $$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$
   Maka
   $J_k(\lambda_o)\mathbf{e}_1 = \lambda_o \mathbf{e}_1,\ J_k(\lambda_o)\mathbf{e}_i = \lambda_o \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{i-1},\ \ i = 2,3,\ldots,k$
4. Untuk $B = J_k(\lambda_o) - \lambda_o I_k$, maka $0 = B\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 = B\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 = B\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_{k-1} = B\mathbf{e}_k$

Suatu matriks dikatakan mempunyai bentuk Kanonik Jordan jika matriks tersebut similar (serupa) ke bentuk Kanonik Jordannya. Dengan menggunakan konsep vektor eigen diperumum dapat dipastikan bahwa setiap matriks mempunyai bentuk Kanonik Jordan.

Bentuk Kanonik Jordan adalah bentuk khusus yang dimiliki oleh suatu matriks di mana dengan menggunakan bentuk khusus ini maka semua informasi aljabar yang beraiatan dengan suatu matriks akan mudah diketahui.

Matriks bentuk Kanonik Jordan adalah matriks blog diagonal $n \times n$ dengan bentuk sebagai berikut.

Definisi [Matriks Kanonik Jordan]
Matriks bentuk Kanonik Jordan adalah matriks blok diagonal $n \times n$:

$$J = \begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & J_{k_2}(\lambda_2) & \cdots & \boldsymbol{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & J_{k_m}(\lambda_m) \end{bmatrix}$$

Dengan m matriks blok Jordan
$$J_{k_1}(\lambda_1), J_{k_2}(\lambda_2), \ldots, J_{k_m}(\lambda_m)$$
sedemikian hingga $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$, dan $\boldsymbol{O}$ adalah matriks nol.

Berikut beberapa contoh dari matriks bentuk Kanonik Jordan

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \text{ dan}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

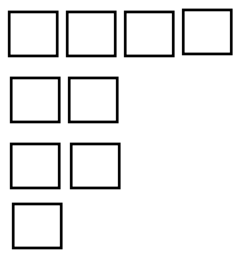
Teorema. *Jumlah dari blok-blok yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_i sama dengan jumlah vektor-vektor eigen yang bebas linier yang bersesuaian dengan λ_i.*

Teorema. *Orde dari blok jordan yang paling besar yang bersesuaian dengan λ_i adalah n_i, dimana n_i adalah pangkat dari $(\lambda - \lambda_i)$ pada polinomial terkecil dari A, $m_A(\lambda)$.*

Adapun sifat-sifat dari matriks Kanonik Jordan, yaitu:

1. $\det(J - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1}(\lambda_2 -$ $\lambda k2 \ldots \lambda m - \lambda km$
2. Suatu nilai eigen dari suatu matriks A dengan multiplisitas aljabar m terjadi sebanyak m kali pada diagonal utama matriks bentuk Kanonik Jordan dari matriks A.
3. Matriks bentuk Kanonik Jordan mempunyai m vector eigen $\mathbf{x}_1^1, \mathbf{x}_2^1, \ldots, \mathbf{x}_m^1$. Masing-masing vektor eigen bersesuaian dengan suatu matriks blok Jordan. Dengan kata lain, Jumlah dari blok-blok Jordan yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_i sama dengan jumlah vektor-vektor eigen yang bebas linear yang bersesuaian dengan λ_i.
4. Blok Jordan yang paling besar diberikan oleh multiplisitas aljabar dari nilai eigen λ_i pada polinomial terkecilnya. Selain itu, ukuran dari blok Jordan terbesar dapat ditentukan dengan mencari indeks dari nilai eigen yang bersesuaian. Ukuran blok Jordan yang terbesar sama dengan nilai indeks dari nilai eigen yang bersesuaian.

Untuk membentuk matriks Kanonik Jordan digunakan algoritma sebagai berikut:

1. Hitunglah nilai-nilai eigen sehingga diperoleh nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$. Di mana setiap nilai eigen λ_i mempunyai multiplisitas aljabar m_k dan multiplisitas geometri μ_k untuk $k = 1,2, \ldots, s$.
2. Untuk sebuah nilai eigen λ dengan multiplisitas aljabar m_k dan multiplisitas geometri μ_k, kita mulai menghitung dimensi ruang eigen pertama dari λ yaitu $\dim(E_\lambda^1)$. Perhitungan dimensi ruang eigen akan terus berlanjut ke ruang eigen berikutnya dan akan berhenti di ruang eigen ke-p yaitu
$$E_\lambda^p = \{\mathbf{x} : (A - \lambda I)^p \mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$
yang berdimensi m_k yang sama dengan multiplisitas aljabar λ. Basis dari E_λ^p adalah $\mathbf{x}_p \neq \mathbf{0}$ yaitu vektor-vektor eigen diperumum dari λ.
3. Buat diagram kotak dengan ketentuan sebagai berikut.
$$d_1 = \dim(E_\lambda^1)$$
$$d_2 = \dim(E_\lambda^2) - \dim(E_\lambda^1)$$
$$\vdots$$
$$d_p = \dim(E_\lambda^p) - \dim(E_\lambda^{p-1})$$
Buatlah diagram dengan d_1 kotak pada baris pertama, d_2 kotak pada baris kedua dan seterusnya. Contoh, jika $d_1 = 4, d_2 = 2, d_3 = 2, d_4 = 1$, maka diagramnya adalah

4. Isilah kotak pada baris ke-k dengan $\mathbf{x}_p \in E_\lambda^p$ tetapi $\mathbf{x}_p \notin E_\lambda^{p-1}$ yang yang bebas linier pada ruang eigen E_λ^k. Karena telah terdapat vektor $\mathbf{x}_p$ disebuah kotak, maka isilah kotak di atasnya dengan vektor $(A - \lambda I)\mathbf{x}_p$.
5. Ulangilah langkah 2 sampai 4 untuk setiap nilai eigen A.
6. Buatlah sebuah matriks Q. Vektor-vektor pada diagram tersebut menjadi kolom-kolom dari matriks Q. Mulailah dari atas dari kolom paling kiri dan diikuti oleh vektor-vektor pada kolom tersebut secara menurun. Jika satu kolom sudah selesai, lanjutkan ke kolom berikutnya dengan prosedur yang sama. Jika satu diagram sudah selesai, lanjutkan ke diagram berikutnya.
7. Matriks bentuk Kanonik Jordan dari A diberikan oleh $J = Q^{-1}AQ$. Tetapi kita dapat menemukan matriks J tanpa menghitung matriks Q, karena faktanya J akan mempunyai satu matriks blok Jordan untuk setiap kolom dari setiap diagramnya. Nilai dari bloknya adalah nilai eigen yang diberikan, dan ukurannya adalah banyaknya kotak pada kolomnya.

Berikut adalah contoh pembuatan matriks Kanonik Jordan dari matriks ordo 3×3 dengan menggunakan algoritma di atas.

Contoh. Temukan matriks bentuk Kanonik Jordan dari

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriks ini hanya mempunyai satu nilai eigen yaitu $\lambda = 2$ dengan multiplisitas aljabar $\alpha(2) = 3$. Oleh karena itu kita harus mencari ruang eigen dari $\lambda = 2$ yang mempunyai dimensi 3. Dimulai dari ruang eigen pertama

Untuk E_2^1: penyelesaian $(A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Penyelesaian sistem ini memberikan

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 2s \\ s \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$E_2^1 =$ dibangun $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$. $\dim(E_2^1) = 2$. $d_1 = \gamma(2) = 2 < \alpha(2)$, maka dilanjutkan ke E_2^2.

Untuk E_2^2: penyelesaian $(C - 2I)^2\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$E_2^2 =$ dibangun $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. $\dim(E_2^2) = 3 = \alpha(2)$.

$$d_1 = 2, d_2 = 3 - 2 = 1$$

$$\begin{array}{cc} \boxed{\mathbf{x}_1} & \boxed{\mathbf{x}_3} \\ \boxed{\mathbf{x}_2} & \end{array}$$

Vektor $\mathbf{x}_2 \in E_2^2$, tetapi $\mathbf{x}_2 \notin E_2^1$ yang bebas linear dengan vektor di E_2^1. Ambil $\mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Kotak di atasnya diisi dengaan $(A - 2I)\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

Sementara diambil $\mathbf{x}_3 \in E_2^1$ yang bebar linear dengan $\mathbf{x}_1$. Diambil $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Diperoleh matriks *non-singular* $Q = [v_1 \;\; v_2 \;\; v_3] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, maka $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. Jadi, matriks Kanonik Jordan dari A adalah

$$J = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Tetapi, Tanpa menghitung matriks Q, kita dapat mencari matriks J. karena diagram diatas mempunyai dua kolom, dua kotak pada kolom pertama dan saru kolom pada kolom kedua, artinya matriks bentuk Kanonik Jordan A mempunyai dua matriks blok Jordan dengan ukuran 2×2 dan 1×1.

Pada penelitian ini juga ditemukan cara lain untuk membntuk matriks Kanonik Jordan selain menggunakan algoritma di atas. Cara kedua ini menggunakan indeks nilai eigen.

Definisi 3.3.1. Indeks dari nilaieigen λ untuk matriks $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ didefinisikan menjadi indeks dari matriks $(A - \lambda I)$. Indeks(λ) adalah bilangan bulat positif terkecil k sehingga salah satu statemen-statemen berikut benar:

- $\text{Rank}\big((A - \lambda I)^k\big) = \text{Rank}\big((A -$ $\lambda Ik+1$
- $\text{Rank}\big((A - \lambda I)^k\big) = \text{Rank}\big((A -$ $\lambda Ik+1$
- $\text{N}\big((A - \lambda I)^k\big) = \text{N}\big((A - \lambda I)^{k+1}\big)$
- $\text{R}\big((A - \lambda I)^k\big) \cap \text{N}\big((A - \lambda I)^{k+1}\big) = 0$
- $\mathbb{C}^n = R\big((A - \lambda I)^k\big) \oplus N\big((A - \lambda I)^k\big)$

indek(μ) = 0 jika hanya jika $\mu \neq \sigma(A)$

Definisi 3.3.2 Untuk setiap $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dengan nilai eigen yang berbeda-beda $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s\}$ terdapat matriks non-singular P sedemikian hingga

$$J = \begin{bmatrix} J(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

- Matriks J mempunyai satu matriks Segmen Jordan $J(\lambda_j)$ untuk masing-masing $\lambda_j \in \sigma(A)$
- Masing-masing segmen Jordan $J(\lambda_j)$ terbuat dari $t_j =$

$dim\left(N\left(A-\lambda_j I\right)\right)$ blok Jordan $J_*(\lambda_j)$ seperti berikut

$$J(\lambda_j) = \begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{t_j}(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

dengan $J_*(\lambda_j) = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{bmatrix}$

- Blok Jordan pada $J(\lambda_j)$ yang paling besar berukuran $k_j \times k_j$, dimana $k_j = \text{indeks}(\lambda_j)$
- Banyaknya blok Jordan yang berukuran $i \times i$ adalah $v_i(\lambda_j)$ dimana $\mathbf{v}_i(\lambda_j) = r_{i-1}(\lambda_j) - 2r_i(\lambda_j) + r_{i+1}(\lambda_j)$ dengan $r_i(\lambda_j) = \text{rank}\left(\left(A-\lambda_j I\right)^i\right)$

Berikut akan dilakukan pembentukan menggunakan cara kedua ini.

Contoh. Temukan matriks bentuk Kanonik Jordan dari

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

- Matriks ini hanya mempunyai satu nilai eigen yaitu $\lambda = 2$, artinya matriks A hanya mempunyai satu segmen Jordan $J(2)$. Yaitu $J = [J(2)]$.
- Mencari indeks nilai eigen dengan menghitung $r_i(\lambda_j) = \text{rank}\left((A-\right.$ $\lambda j I i.$ $k1=$indeks$2=2.$ Artinya, blog jordan terbesar berukuran 2×2.

- Karena matriks A berordo 3×3, maka blok jordan yang satunya berukuran 1×1.

Jadi, matriks Kanonik Jordan dari A adalah

$$J = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

KESIMPULAN DAN SARAN

Menemukan vektor-vektor eigen diperumum merupakan langkah awal untuk membentuk matriks Kanonik Jordan. Jika suatu matriks tidak dapat didiagonalisasi maka harus dicari vektor-vektor eigen diperumum dari matriks tersebut untuk memperluas basis ruang eigennya sehingga dimensi ruang eigennya sama dengan multiplisitas aljabarnya. Jika demikian maka matriks tersebut dapat didiagonalisasi untuk membentuk matriks Kanonik Jordannya.

Matriks Kanonik Jordan terdiri dari beberapa blok Jordan. Setiap blok Jordan hanya mempunyai satu nilai eigen dan satu vektor eigen yang bebas linear. Sedangkan matriks Kanonik Jordan mempunyai nilai eigen yang sama dengan matriks asalnya, matriks Kanonik Jordan mempunyai m vektor eigen dan masing-masing vektor eigen bersesuaian dengan suatu matriks blok Jordan.

Matriks bentuk Kanonik Jordan dari suatu matriks dapat diindentifikasi melalui matriks asalnya. Identifikasi ini dapat dilihat dari nilai eigen, multiplisitas aljabar dan multiplisitas geometri dari setiap nilai eigen. Banyaknya nilai eigen dari matriks A menunjukan banyaknya segmen jordan dari A, dengan kata lain setiap nilai eigen bersesuaian dengan satu segmen Jordan. Multilisitas aljabar nilai eigen menandakan ukuran segmen Jordan, sedangkan multiplisitas geometri dari ruang eigen pertama nilai eigennya menunjukan banyaknya blok Jordan pada suatu segmen Jordan. indeks nilai eigen menunjukan ukuran blok Jordan terbesar pada segmen Jorda.

Matriks Kanonik Jordan dapat digunakan untuk mencari informasi-informasi aljabar dari matriks asalnya. Oleh sebab itu, untuk menindaklanjuti penulisan ini, penulis sangat berharap adanya penelitian baru yang membahas tentang ketunggalan bentuk Kanonik Jordan dari sutau matriks hingga ke aplikasi atau kegunaan dari matriks bentuk Kanonik Jordan salah satunya invers diperumum untuk matriks singuar.

DAFTAR PUSTAKA

Anonim. 2013. *Generalized Eigenvectors.* http://hans.math.upenn.edu, diakses 11 Desember 2013.

Anonim. Tt. *Algorithm for the Jordan Form of a Matrix*. http://math.rice.edu., diakses 8 Juni 2014.

Anonim. Tt. *Computing the Jordan Canonical Form.* http://empslocal.ex.ac.uk., diakses tanggal 5 April 2014.

Anonim. Tt. *Generalized Eigenvectors and Jordan Form.* http://mathcs.holycross.edu. Diakses tanggal 20 Maret 2014.

Anonim. Tt. *Generalized Eigenvectors*. http://www.cfm.brown.edu, diakses 15 Januari 2013.

Anonim. Tt. *Lecture notes on Generalized Eigenvectors for Systems with Repeated Eigenvalues.* http://www.uio.no, diakses 11 Desember 2013.

Anton, Howard. dan Chris R. 1973. *Elementary Linear Algebra Applications Version*, 6th *Edition*. United States: John Wiley & Sons, Inc

Anton, Howard. dan Chris R. 2000. *Aljabar linear Elementer Versi Aplikasi Edisi Kedelapan Jilid 1.* Jakarta: Erlangga

Horm, Roger A. dan Charles R. Johnson.1990. *Matrix Analysis*. London: Cambridge Unversity Press.

Israel, Ben et. Al. 2002. *Generalized Inverses Theory and Applications Second Edition*. NewYork: Springer-Verlag.

Kenneth H. Rossen, Ph.D. 2007. *Handbook of Linear Algebra*. U.S.A: Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group

Setiadji. 2008. *Aljabar Linier*. Yogyakarta: Graha Ilmu

Seymour L. Ph.D. dan Marc L. Ph.D. 2009, *Linear Algebra, Fourth Edition, Schaum's Outlines Series*. United States: McGraw-Hill.

Tabrizian, Peyam R. 2013. *How to Find the Jordan Canonical Form of a Matrix*. http://math.berkeley.edu. diakses 22 Maret 2014.