**PEMBENTUKAN MATRIKS KANONIK JORDAN DENGAN MENGGUNAKAN VEKTOR-VEKTOR EIGEN DIPERUMUM**

**SKRIPSI**

Oleh:

DARLENA

NIM: 10321358

****

**JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA**

**FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN**

**UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH PONOROGO**

**2014**

****

**PEMBENTUKAN MATRIKS KANONIK JORDAN DENGAN MENGGUNAKAN VEKTOR-VEKTOR EIGEN DIPERUMUM**

**SKRIPSI**

Diajukan Kepada Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Muhammadiyah Ponorogo

untuk memenuhi salah satu persyaratan guna memperoleh gelar Sarjana

Oleh:

**DARLENA**

**NIM: 10321358**

**JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA**

**FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN**

**UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH PONOROGO**

**2014**

** FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN**

 **UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH PONOROGO**

 **(STATUS TERAKREDITASI)**

 **Jl. Budi Utomo No. 10 Telp (0352)481124**

 **Ponorogo 63471**

**HALAMAN PERSETUJUAN**

Skripsi oleh Darlena dengan JUDUL PEMBENTUKAN MATRIKS KANONIK JORDAN DENGAN MENGGUNAKAN VEKTOR-VEKTOR EIGEN DIPERUMUM, ini telah diperiksa dan disetujui untuk diuji.

Ponorogo, 27 Agustus 2014

Pembimbing

Dr. Julan Hernadi, M.Si

NIP. 19670705 199303 1 003

** FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN**

 **UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH PONOROGO**

 **(STATUS TERAKREDITASI)**

 **Jl. Budi Utomo No. 10 Telp (0352)481124**

 **Ponorogo 63471**

**HALAMAN PENGESAHAN**

Skripsi oleh Darlena ini,

Telah dipertahankan di depan penguji pada tanggal 2 September 2014.

 **Tim Penguji,**

 **Dr. Julan Hernadi, M.Si Penguji I**

 **NIP. 19670705 199303 1 003**

 **Drs. Sumaji , M.Pd Penguji II**

 **NIP. 19630303199103 1 003**

 **Erika Eka Santi, M.Si Penguji III**

 **NIK. 19811212 20091213**

**Mengesahkan**

**Dekan**

**Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan**

**BAMBANG HARMANTO, M.Pd**

**NIP. 19710823 200501 1 001**

**MOTTO**

**“*Hidup Sekali Hidup yang Berarti”***

**PERSEMBAHAN**

**Skripsi ini adalah bagian dari ibadahku kepada Allah SWT, karena kepadaNya-lah kami menyembah dan kepadaNya-lah kami mohon pertolongan. Sekaligus sebagai ungkapan terima kasihku kepada :**

1. **Kedua orang tua (Bapak Jemelung dan Ibu Hanodah) yang selama ini selalu mencurahkan kasih sayangnya kepadaku. Terima kasih atas semua semangat dan motivasi baik moril maupun spirituil yang Kalian berikan dan terima kasih atas ketulusan do’a yang tak pernah putus untukku. Aku bangga menjadi anak Kalian.**
2. **Adik-adikku tercinta (Rafitasari, Anita dan Eka Fitriani) yang senantiasa membuatku tertawa dan termotivasi saat sedih dan jenuh melanda dalam menyelesaiakan tugas akhir ini, serta Bibikku (Wak Selimang) yang tak pernah bosan memberikan nasehat dan Do’anya kepadaku. Aku sayang kalian...**
3. **Keluarga besarku, berkat dukungan dan do’a Kalian, semua lebih mudah.**
4. **Ibu kosku dan teman-teman kosku yang sudah memberikan warna dalam hidupku.**
5. **Teman-teman kuliah matematika c angkatan 2010, teman-teman satu bimbingan, khususnya Triwik Handayani dan Anis Fitri Lestari teman senasib dan seperjuangan. Mari berjuang untuk langkah selanjutnya!**
6. **Teman-teman PPL SMPN 1 PONOROGO, Teman-teman KKN RCM Tempuran terima kasih atas pelajaran berharga yang kalian berikan.**
7. **Dan semunya yang telah menjadi bagian dari hidupku**

**PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN**

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Darlena

NIM : 10321358

Fakultas : Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Jurusan : Pendidikan Matematika

Judul Skripsi : Pembentukan Matriks Kanonik Jordan dengan Menggunakan Vektor- Vektor Eigen Diperumum

 Menyatakan bahwa skripsi tersebut adalah karya saya sendiri dan bukan karya orang lain, baik sebagian maupun keseluruhan, kecuali dalam bentuk kutipan yang telah disebutkan sumbernya.

 Selanjutnya apabila dikemudian hari ada klaim dari pihak lain, bukan menjadi tanggung jawab Dosen Pembimbing dan/atau Pengelola Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Muhammadiyah Ponorogo, tetapi menjadi tanggung jawab saya sendiri.

 Demikian surat pernyataan ini saya buat dengan sebenar-benarnya dan apabila pernyataan ini tidak benar, saya bersedia mendapat sanksi akademis.

Ponorogo, Agustus 2014

Yang Menyatakan

Darlena

**ABSTRAK**

**Darlena, 2014**. Pembentukan Matriks Kanonik Jordan Menggunakan Vektor-Vektor Eigen Diperumum. Jurusan Pendidikan Matematika. Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan. Universitas Muhammadiyah Ponorogo. Pembimbing: Dr. Julan Hernadi, M.Si

**Kata kunci**: Vektor-vektor eigen diperumum, Matriks bentuk kanonik jordan.

 Dalam pembahasan aljabar linear tingkat lanjut banyak dibahas tentang bentuk khusus suatu matriks salah satunya adalah bentuk Kanonik Jordan. Bentuk Kanonik Jordan adalah bentuk khusus dari suatu matriks yang dapat digunakan untuk menemukan informasi-informasi aljabar linear dari matriks asalanya dengan mudah, salah satunya mencari invers diperumum untuk matriks singular. Matriks bentuk ini dapat diperoleh melalui proses diagonalisasi matriks asalnya, tetapi tidak semua matriks dapat didiagonalisasikan sehingga tidak semua matriks dapat ditemukan bentuk Kanonik Jordannya.

 Dalam penulisan ini akan di bahas pembetukan matriks bentuk Kanonik Jordan menggunakan vektor-vektor eigen diperumum dan menggunakan sifat-sifat matriks Kanonik Jordan. Pembahasan ini bertujuan untuk mengetahui cara menetukan vektor-vektor eigen diperumum, sifat-sifat matriks Kanonik Jordan, dan algoritma pembentukan matriks bentuk Kanaonik Jordan dengan menggunakan vektor-vektor eigen diperumum.

 Dalam penelitian ini diketahui bahwa tidak semua matriks persegi dapat didiagonalisasikan, sehingga tidak semua matriks persegi dapat ditemukan bentuk Kanonik Jordannya. Oleh karena itu, dilakukan proses diagonalisasi dengan bantuan vektor-vektor eigen diperumum yang kemudian untuk membentuk matriks Kanonik Jordan.

 Dari hasil penelitian kali ini menunjukan bahwa vektor-vektor eigen diperumum dapat digunakan untuk menemukan vektor-vektor basis ruang eigen dimana banyaknya basis ini disamakan dengan banyaknya multilisitas aljabar nilai eigen. Dengan demikian, diagonalisasi untuk pembentukan matriks Kanonik Jordan dapat dilakukan. Kemudian, hasil analisis selanjutnya yaitu tentang sifat bentuk Kanonik Jordan. Sifat-sifat ini ternyata juga dapat digunakan untuk membentuk matriks Kanonik Jordan. Adapun hasil analisis sifat-sifat tersebut antara lain, multiplisitas aljabar nilai eigen menunjukan jumlah nilai eigen tersebut pada diagonal utama matriks Kanonik Jordan, multiplisistas geometri menunjukan jumlah blok Jordan yang terbentuk dari nilai eigen tersebut. Sedangkan ukuran dari masing-masing blok Jordan dapat diketahui mengunakan indeks nilai eigen. Bentuk Kanonik Jordan yang dihasilkan dari kedua cara ini adalah sama.

**KATA PENGANTAR**

Pujisyukur Alhamdulillah atas kehadirat Allah SWT, dzat yang Maha Sempurna, Maha Pengasih dan Maha Penyayang yang mana telah memberikan rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Pembentukan Matriks Kanonik Jordan dengan Menggunakan Vektor-vektor Eigen Diperumum.

Sholawat juga tak lupa selalu dipanjatkan kepada junjungan kita Nabi Muhammad SAW, dimana berkat jasa dan perjuangan beliaulah kita dapat merasakan nikmatnya beriman dan berislam seperti sekarang ini.

Pada kesempatan ini, penulis ingin mengucapkan terimakasih atas segala bentuk bantuan kerjasama dari semua pihak yang telah membantu dalam penulisan skripsi ini. Rasa hormat, terimakasih serta iringan do’a penulis ucapakan kepada:

1. Drs. H. Sulton, M.Si selaku Rektor Universitas Muhammadiyah Ponorogo.
2. Bambang Harmanto, M.Pd selaku Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Muhammadiyah Ponorogo.
3. Dr. Julan Hernadi, M.Si selaku Ketua Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Ponorogo, sekaligus sebagai Dosen Pembimbing yang telah bersedia meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan dan pengarahan selama penulisan skripsi.
4. Bapak/ Ibu Dosen Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Muhammadiyah Ponorogo beserta stafnya atas arahan dan pengalaman yang diberikan.
5. Keluarga, teman-teman dan semua pihak yang telah membantu hingga terselesainya skripsi ini.

Semoga amal Bapak, Ibu dan rekan-rekan mendapatkan balasan yang sepantasnya dari Allah SWT.

Semagaimana pepatah mengatakan, tiada gading yang tak retak, demikian pula dengan skripsi ini, walaupun telah melalui tahap perencanaan penyusunan, dan revisi tapi masih ada yang perlu disempurnakan. Oleh karena itu saran, dan kritik yang membangun diterima dengan senang hati teriring ucapan terima kasih.

Penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi para pembaca, dan dapat memberikan kontribusi positif terhadap perkembangan ilmu pengetahuan. Amien.

Ponorogo, Agustus 2014

 Darlena

**DAFTAR TABEL**

**Tabel 2.11.1** Invarian-invarian Keserupaan 35

**DAFTAR GAMBAR**

**Gambar 3.1.1.1.1** Gambar 3.1.1.1 Contoh diagram penempatan vektor eigen

**Gambar 3.1.1.2** Diagram penempatan vektor eigen dari matriks $A\_{2×2}$ dengan dim$\left(E\_{λ}^{1}\right)=1$

**Gambar 3.1.1.3** Penempatan vektor eigen dari matriks $A\_{2×2}$ dengan dim$\left(E\_{λ}^{1}\right)=1$

**Gambar 3.1.1.4** Diagram penempatan vektor eigen dari matriks $B\_{3×3}$ dengan dim$\left(E\_{λ}^{1}\right)=1$

**Gambar 3.1.1.5** Penempatan vektor eigen dari matriks $B\_{3×3}$ dengan dim$\left(E\_{λ}^{1}\right)=1$

**Gambar 3.1.1.6** Penempatan vektor eigen dari matriks $C\_{3×3}$ dengan dim$\left(E\_{λ}^{1}\right)=2$

**Gambar 3.1.1.7** Penempatan vektor eigen dari matriks $D\_{6×6}$ dengan dim$\left(E\_{λ}^{1}\right)=2$

**DAFTAR SIMBOL**

|  |  |
| --- | --- |
| **SIMBOL** | **ARTI** |
| $u, v, w, atau p$ | Vektor |
| $i,j,atau k$ | Vektor standar |
| $0$ | Vektor nol |
| $c, k atau l$  | Skalar  |
| *V* atau *W* | Ruang vektor |
| $$R^{3}$$ | Ruang vektor berdimensi 3 |
| $$R^{n}$$ | Ruang vektor berdimensi n |
| $A, B, C$  | Matriks bujursangkar |
| $$det\left(A\right)$$ | Determinan matriks *A* |
| $$Rank\left(A\right)$$ | Rank matriks *A* |
| $nulitas\left(A\right)$  | Nulitas matriks *A* |
| $$x$$ | Vektor eigen |
| $$λ$$ | Nilai eigen  |
| $$I$$ | Matriks identitas |
| $$D$$ | Matriks Diagonal |
| $$P$$ | Matriks *nonsingular* |
| $$P^{-1}$$ | Invers matriks *nonsingular P* |
| $$α\left(λ\right)$$ | Multiplisitas aljabar dari nilai eigen $λ$ |
| $$γ\left(λ\right)$$ | Multiplisitas geometri dari nilai eigen $λ$ |
| $$E\_{λ}^{i}$$ | Ruang iigen ke-*i* dari nilai eigen $λ$ |
| $$J\_{k}\left(λ\right)$$ | Matriks blok Jordan berordo $k×k$ |
| $p\_{J\_{k}\left(λ\_{o}\right)}\left(λ\right)$  | Karakteristik polinomial dari matriks $J\_{k}\left(λ\_{o}\right)$ |
| $m\_{J\_{k}\left(λ\_{o}\right)}\left(λ\right)$  | Polinomial terkecil dari dari matriks $J\_{k}\left(λ\_{o}\right)$ |
| $$J$$ | Matriks Kanonik Jordan |

**DAFTAR ISI**

HALAMAN JUDUL i

LOGO ii

HALAMAN PENGAJUAN iii

HALAMAN PERSETUJUAN iv

HALAMAN PENGESAHAN v

MOTTO vi

PERSEMBAHAN vii

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN ix

ABSTRAK x

KATA PENGANTAR xi

DAFTAR TABEL xiii

DAFTAR GAMBAR xiv

DAFTAR SIMBOL xv

DAFTAR ISI xvi

BAB I PENDAHULUAN

1. Latar Belakang Masalah 1
2. Rumusan Masalah 3
3. Tujuan Penulisan 4
4. Batasan Masalah 4
5. Manfaat Penulisan 5
6. Metode Penulisan 5
7. Sistematika Penulisan 7

BAB II LANDASAN TEORI

1. Ruang Vektor 9
2. Kombinasi Linear 14
3. Membangun Linear 15
4. Kebebasan Linear 17
5. Basis dan Dimensi 19
6. Ruang Baris, Ruang Kolom dan Ruang Nul 24
7. Rank dan Nulitas 26
8. Nilai Eigen dan Vektor Eigen 29
9. Diagonalisasi 32
10. Multiplisistas Aljabar dan Multiplisistas Geometri 38
11. Keserupaan 39

BAB III PEMBAHASAN

* 1. Vektor-Vektor Eigen Diperumum 42

Vektor-vektor Eigen Diperumum 42

Rantai Vektor-vektor Eigen Diperumum 46

* 1. Matriks Bentuk Kanonik Jordan dan Sifat-sifatnya 50
	2. Pembentukan Matriks Kanonik Jordan 63
1. Pembentukan Matriks Kanonik Jordan Menggunakan Vektor-Vektor Eigen Diperumum 63
2. Pembentukan Matriks Kanonik Jordan Menggunakan Sifat-sifat Matriks Kanonik Jordan 82

BAB IV PENUTUP

* 1. Kesimpulan 87
	2. Saran 90

DAFTAR PUSTAKA 91