BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Matematika merupakan ilmu eksak yang mendalami bilangan dan kalkulasi. Salah satu bagian utamanya adalah matematika analisis, yang merupakan suatu ranah kognitif dalam matematika murni yang melibatkan penalaran logis dan konsep-konsep yang kompleks secara mendalam. Dalam bahasa Yunani analisis artinya memecah atau memisahkan suatu topik yang kompleks menjadi bagian yang sederhana agar mudah dipahami. Dalam analisis membahas beberapa keilmuan seperti analisis riil, kalkulus, analisis fungsional, dan lain-lain. Matematika sebagai suatu ilmu pasti yang berkembang memiliki fondasi yang kuat dan kokoh. Matematika analisis dapat dianggap sebagai pilar fundamental bagi matematika, karena di dalam cabang inilah berbagai konsep dasar dan teori utama diperkenalkan sekaligus dikembangkan lebih lanjut. (Wicaksono,2019)

Analisis fungsional merupakan bagian dari matematika analisis yang cukup berkembang pesat. Perkembangan analisis fungsional sangat bercabang dalam beberapa tahun terakhir baik teori maupun penggunaannya (Aris & Nurwahyu, 2020). Kajian umum analisis fungsional mencakup pembahasan mengenai konsep fundamental seperti ruang metrik, ruang bernorma, dan ruang Banach. Salah satunya adalah pengembangan teori titik tetap pada ruang metrik. Dengan peran vitalnya di bidang sains, teknologi, dan kesehatan, teori titik tetap menjadi instrumen fundamental untuk memecahkan masalah matematis. Beberapa penerapan utamanya meliputi solusi persamaan diferensial biasa dan parsial, metode aproksimasi, serta analisis persamaan non-linear dalam pemodelan penyakit.

Teori titik tetap, pertama kali diperkenalkan pada tahun 1912 oleh L. E. J. Brouwer, menyatakan bahwa setiap pemetaan kontinu di $\mathbb{R}$ pasti memiliki setidaknya satu titik tetap yaitu $f(x) = x$ (Fithrullah, 2024). Pada tahun 1922, penelitian mengenai teorema titik tetap Brouwer dikembangkan lebih lanjut oleh G. D. Birkhoff dan O. D. Kellog, yang memanfaatkannya dalam pembuktian eksistensi titik tetap pada konteks persamaan diferensial (Sukaesih, 2015). Pada tahun yang sama, Stefan Banach memperluas konsep ini dengan merumuskan teorema titik tetap dalam kerangka ruang metrik. Teorema Banach ini menetapkan adanya satu titik tetap yang unik untuk suatu pemetaan tertentu dalam ruang metrik (Mutmainnah, 2023). Meskipun sangat kuat, syarat kontraksi yang ketat dalam teorema Banach membatasi penerapannya pada kelas pemetaan yang lebih sempit, sehingga mendorong para peneliti untuk mencari kondisi yang lebih lemah yang tetap menjamin keberadaan titik tetap. Teori titik tetap dalam pembahasan ruang metrik sangat penting. Sehingga banyak ilmuan yang mengembangkannya seperti Ciric. Ciric mengembangkan teorema titik tetap dengan mempertimbangkan peneliti-peneliti sebelumnya terkait kekonvergenan, barisan Cauchy, dan ruang metrik lengkap. (Karapinar dkk, 2020)

Pondasi teorema Ciric adalah ruang metrik. Awalnya ruang metrik dikenalkan oleh Maurice Frechet pada awal abad ke-19 dalam tesisnya dengan judul *"Surquelques Point du Calcul Fonctionel"*. Ruang metrik dapat disebut himpunan yang didalamnya berlaku suatu aturan metrik (Hastuti, 2019). Sebuah metrik pada dasarnya merupakkan fungsi dengan aturan spesifik yang memberikan nilai jarak (berupa bilangan real non-negatif) untuk setiap dua elemen dalam sebuah himpunan. Dari konsep ruang yang dilengkapi metrik inilah, lahir generalisasi dan konsep baru, contohnya adalah ruang b-metrik. Generalisasi ini terinspirasi dari adanya fungsi-fungsi dalam analisis yang berperilaku seperti jarak namun tidak memenuhi pertidaksamaan segitiga secara klasik, sehingga diperlukan sebuah struktur ruang yang lebih longgar untuk dapat menganalisisnya.

Bakhtin memperkenalkan ruang b-metrik yang adalah bentuk umum dari ruang metrik dalam karyanya dengan judul *" The Contraction Mappings Principle In Quasimetric Space"* (Litiyawati, 2017). Seiring dengan berkembangnya kajian dalam analisis ruang abstrak, sejumlah teorema baru mulai bermunculan yang secara khusus membahas berbagai aspek fundamental dalam ruang b-metrik. Di antaranya mencakup pembahasan mengenai kekonvergenan barisan, karakteristik barisan Cauchy, serta konsep kelengkapan ruang b-metrik. Ruang b-metrik memberikan fleksibilitas dalam analisis karena mengizinkan pelonggaran terhadap syarat ketat pertidaksamaan segitiga melalui pengenalan konstanta $k \geq 1$, sehingga memungkinkan penerapan teori titik tetap dan analisis fungsional pada struktur ruang yang lebih luas dibandingkan ruang metrik standar

Penelitian modern saat ini cenderung pada generalisasi ruang dan generelisasi pemetaan. Teorema titik tetap Ciric merupakan generalisasi dari teorema titik tetap Banach yang syaratnya mengkombinasikan beberapa nilai jarak. Teorema Ciric menjamin eksistensi titik tetap dibawah kondisi yang lebih umum daripada teorema Banach (Karapinar dkk, 2020). Oleh karena itu, mengkaji teorema titik Ciric dalam konteks ruang b-metrik menjadi sebuah topik penelitian yang relevan dan penting.

Berdasarkan uraian tersebut, fokus penelitian ini adalah melakukan kajian terhadap teorema titik tetap Ciric dalam ruang b-metrik, yang disajikan melalui pembahasan sistematis mengenai konsep dasar hingga teorema disertai contoh untuk memperjelas konsep. Kajian ini merujuk pada hasil penelitian yang dikembangkan oleh Erdal Karapınar, Zoran D. Mitrovic, Ali Ozturk, dan Stojan Radenovic, yang membuktikan bahwa dengan penyesuaian kondisi kontraktif tertentu, eksistensi dan keunikan titik tetap tetap dapat dijamin dalam ruang b-metrik yang lengkap.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang, pertanyaan utama yang ingin dijawab dalam penelitian ini adalah "Bagaimana syarat yang menjamin eksistensi titik tetap teorema Ciric pada ruang b-metrik?".

1.3 Tujuan Kajian

Tujuan penelitian ini untuk menguraikan syarat-syarat yang menjamin keberadaan titik tetap dalam teorema Ciric pada ruang b-metrik.

1.4 Kegunaan Kajian

Hasil dari penelitian ini diharapkan dapat digunakan untuk memperluas wawasan teoritis dalam matematika analisis, terutama tentang titik tetap teorema Ciric pada ruang b-metrik yang digunakan dalam penyelesaian masalah analisis titik tetap.

1.5 Metode Kajian

Penelitian ini menerapkan metode studi literatur (studi pustaka), sebuah pendekatan yang melibatkan pengumpulan dan analisis data secara sistematis dari berbagai sumber tertulis. Sumber-sumber tersebut mencakup buku, jurnal, dan catatan yang berkaitan langsung dengan pokok bahasan yang dikaji. Penelitian ini menggunakan rujukan utama dari hasil penelitian (Karapinar dkk, 2020) dengan judul "*On a theorem of Ciric in b-metric spaces*". Proses penelitian ini dimulai dengan mempelajari beberapa literatur hasil penelitian mengenai ruang metrik lengkap sebagai dasar dalam memahami formulasi dan validitas teorema titik tetap Ciric. Kajian terhadap ruang metrik mencakup pembahasan mengenai struktur dasar ruang tersebut, termasuk definisi metrik, sifat-sifat barisan konvergen dan barisan Cauchy, serta konsep kelengkapan yang merupakan prasyarat penting dalam teorema titik tetap. Selanjutnya penelitian mengkaji definisi dari ruang b-metrik yang memungkinkan ruang tersebut mengakomodasi lebih banyak jenis pemetaan dan kondisi dibanding ruang metrik standart. Penelusuran literatur dalam tahap ini mencakup definisi formal dan sifat-sifat, serta karakteristik barisan konvergen dan Cauchy dalam kerangka b-metrik, serta kelengkapannya. Sehingga dapat digunakan untuk eksplorasi teorema Ciric pada ruang b-metrik.

1.6 Definisi Istilah

Titik tetap	:	Sebuah titik yang nilainya tidak berubah setelah sebuah fungsi diterapkan padanya, $f(x) = x$.
Ruang metrik	:	Pasangan himpunan tak kosong X dan fungsi jarak d yang dinotasikan (X, d) yang memenuhi kriteria non negatif, identitas, simetri, dan pertidaksamaan segitiga.
Ruang metrik lengkap	:	Ruang metrik dimana setiap barisan Cauchy di dalamnya pasti memiliki limit yang juga merupakan elemen dari ruang tersebut. Artinya, tidak ada barisan Cauchy yang limitnya berada di luar ruang.
Ruang b-metrik	:	Generalisasi dari ruang metrik dinotasikan dengan (X, b) yang memenuhi kriteria identitas dan simetri,

		tetapi dengan pertidaksamaan segitiga yang dilonggarkan dengan konstanta $k \geq 1$.
Ruang b-metrik lengkap	:	Ruang b-metrik yang memiliki sifat bahwa semua barisan Cauchy di dalamnya pasti memiliki limit atau konvergen ke suatu titik dalam ruang tersebut.
Barisan konvergen	:	Barisan yang suku-sukunya semakin mendekati sebuah titik limit.
Barisan Cauchy	:	Barisan yang selisih suku-sukunya semakin merapat.
f^n	:	Iterasi ke-n dari f